LEBSIR HABIB

Travaux Dirigés

D'algebre Génerale

Exercices Résolus et Commentés

1éres et 2émes Années universitaires
(cycles scientifiques et techniques)

UNIVERSITE MENTOURI
CONSTANTINE

DAR EL-HOUDA
AIN M'LILA

LEBSIR HABIB

Travaux Dirigés D'ALGEBRE GENERALE

Exercices Résolus et Commentés

1ère et 2ème Années universitaires
(cycles scientifiques et techniques)

Dar El Houda
Ain M'lila - Algerie

Tous droits réservés à l'auteur

N⁰ d'ordre 1202/2003 dar el houda

Dépôt légal 894/2003 bibliothéque nationale

ISBN 9961 – 60 – 467 – 9

Sarl Dar el Houda Imprission – Edition – Diffusion

Z.I BP .193 Ain Mlila

Tel: 032 44 95 47 - .32 44 92 00

Fax: 032 44 94 18

www.elhouda.com

“ Les plus grandes choses n’ont besoin que d’être dites simplement ”.

jean de la Bruyère.

Avant propos

Les notions d'ensembles, puissance d'ensembles (puissance du continu, puissance du dénombrable, ensemble plus puissant ou moins puissant qu'un autre ensemble...), de relations, de nombres cardinaux (finis et infinis), ont été essentielles, avec d'autres concepts d'algèbre générale et notamment d'algèbre des structures, pour le développement et l'essor de l'analyse en général, l'analyse fonctionnelle et l'analyse numérique en particulier, les probabilités et d'autres domaines des mathématiques appliquées.

Cet ouvrage constitue un appoint aux étudiants de 1^{ére} année des « sciences exactes et de technologies » désirant approfondir leurs connaissances sur les concepts liés aux notions citées en haut.

J'ose espérer avoir mis entre les mains de nos chers étudiants, un ouvrage utile et apprécié.

Je remercie vivement l'équipe dynamique qui a contribué à la réalisation technique de ce travail.

L'auteur ;
H. Lebsir.

CHAPITRE E

Théorie des Ensembles

(15 Exercices, 62 Questions)

- Opérations sur les ensembles : ($\subset$,C, $\cap$, $\cup$, Δ, x).
- Famille d'ensembles indexée par un ensemble I.
- Opérations sur les familles d'ensembles.
- Partitions, recouvrements.

Exercice 1 :

Soient E un ensemble et

Soient A, B, C $\in$ P(E) tels que :

$(A \cup C) \subset (A \cup B)$ et $(A \cap C) \subset (A \cap B)$.

Montrer que $C \subset B$.

Solution :

Soit $x \in C$: $(x \in C) \Rightarrow (x \in A \cup C) \Rightarrow (x \in A \cup B)$ (Car $(A \cup C) \subset (A \cup B)$).

$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A$ ou $x \in B)$.

Si $x \in A$ alors $x \in A \cap C$ (car $x \in C$).

Mais $(x \in (A \cap C)) \Rightarrow (x \in A \cap B)$ (car $(A \cap C) \subset (A \cap B)$).

$(x \in (A \cap B)) \Leftrightarrow (x \in A$, et $x \in B)$.

donc : $x \in B$.

Si $x \in B$ on a directement $x \in B$.

Finalement : $\forall x \in C, x \in B$ et par suite : $\boxed{C \subset B}$

Exercice 2 :

Soient E un ensemble non vide et F et G deux sous ensembles de E.

Etablir les équivalances :

1. $(F \subset G) \Leftrightarrow (F \cup G = G) \Leftrightarrow (\overline{F} \cup G = E)$.

2. $(F \subset G) \Leftrightarrow (F \cap G = F) \Leftrightarrow (F \cap \overline{G} = \phi)$.

($\overline{F}$ et $\overline{G}$ représentent les complémentaires de F et G par rapport à E).

Solution :

1. a) $(F \subset G) \Leftrightarrow (F \cup G = G)$.

- $(F \subset G) \Rightarrow (F \cup G = G)$.

Remarquons d'abord qu'indépendamment de $F \subset G$, nous avons toujours:

$G \subset F \cup G$.

Il reste à prouver que : $(F \subset G) \Rightarrow (F \cup G \subset G)$.

Soit $x \in F \cup G$: $(x \in F \cup G) \Leftrightarrow (x \in F$ ou $x \in G)$.

si : $x \in F$ Alors $x \in G$ (Car $F \subset G$).

si : $x \in G$ alors $x \in G$ $(G \subset G)$.

Dans les deux cas : $(x \in F \cup G) \Rightarrow (x \in G)$.

donc $\boxed{F \cup G \subset G}$

Finalement on a : $\boxed{(F \subset G) \Rightarrow (F \cup G = G)}$.

- Montrons à présent l'implication : $(F \cup G = G) \Rightarrow (F \subset G)$.

Soit $x \in F$ alors $x \in F \cup G = G$ Donc : $x \in G$. Et par suite : $\boxed{F \subset G}$

Finalement : $\boxed{(F \subset G) \Leftrightarrow (F \cup G = G)}$

b) $(F \subset G) \Leftrightarrow (\bar{F} \cup G = E)$.

Remarquons qu'indépendamment de $F \subset G$, on a toujours $\bar{F} \cup G \subset E$ [l'union est une opération interne sur $P(E)$].

Il reste donc à prouver que: $(F \subset G) \Leftrightarrow (E \subset \bar{F} \cup G)$.

- Montrons en premier lieu l'implication : $(F \subset G) \Rightarrow (E \subset \bar{F} \cup G)$.

soit $x \in E$ alors $x \in F \cup \bar{F} = E$

Si $x \in F$ alors $x \in G$ (car $F \subset G$) et donc $x \in \bar{F} \cup G$ car $(G \subset \bar{F} \cup G)$

Si $x \in \bar{F}$ alors $x \in \bar{F} \cup G$ (car $\bar{F} \subset \bar{F} \cup G$)

Dans les deux cas :

$(x \in E) \Rightarrow (x \in \bar{F} \cup G)$.

Donc $\boxed{E \subset \bar{F} \cup G}$

Et par suite: $\boxed{(F \subset G) \Rightarrow (E \subset \bar{F} \cup G)}$

- Montrons à présent l'implication : $(E \subset \bar{F} \cup G) \Rightarrow (F \subset G)$

Soit $x \in F$ alors $x \in E$ (Car $F \subset E$)

$(x \in E) \Rightarrow (x \in \bar{F} \cup G)$ (Car $E \subset \bar{F} \cup G$)

$(x \in F$ et $x \in \bar{F} \cup G) \Rightarrow (x \in G)$ (Car $x \notin \bar{F}$)

donc $(x \in F) \Rightarrow (x \in G)$ et par suite:

$F \subset G$ et $(E \subset \overline{F} \cup G) \Rightarrow (F \subset G)$

Finalement: $\boxed{(F \subset G) \Leftrightarrow (\overline{F} \cup G = E)}$

$(F \subset G) \Leftrightarrow (F \cup G = G)$ et $(F \subset G) \Leftrightarrow (\overline{F} \cup G = E)$; alors par transitivité:

$\boxed{(F \subset G) \Leftrightarrow (F \cup G = G) \Leftrightarrow (\overline{F} \cup G = E)}$

2. $(F \subset G) \Leftrightarrow (F \cap G = F) \Leftrightarrow (F \cap \overline{G} = \phi)$.

Procédons comme dans (1)

a) $(F \subset G) \Leftrightarrow (F \cap G = F)$

Remarquons qu'indépendamment de $F \subset G$ on n'a toujours $F \cap G \subset F$

Il reste donc à prouver: $(F \subset G) \Leftrightarrow (F \subset F \cap G)$

Prouvons l'implication : $(F \subset G) \Rightarrow (F \subset F \cap G)$

Soit $x \in F$ Alors $x \in G$ (car $F \subset G$) et donc $x \in F \cap G$ d'où : $\boxed{F \subset F \cap G}$.

Et par suite : $\boxed{(F \subset G) \Rightarrow (F \subset F \cap G)}$

- Montrons à present l'implication : $(F \subset F \cap G) \Rightarrow (F \subset G)$

soit $x \in F$ Alors $x \in F \cap G$ (car $F \subset F \cap G$)

$(x \in F \cap G) \Rightarrow (x \in G)$

D'où $(x \in F) \Rightarrow (x \in G)$ et par suite :$F \subset G$

Donc $(F \subset F \cap G) \Rightarrow (F \subset G)$

Finalement : $\boxed{(F \subset G) \Leftrightarrow (F \subset F \cap G)}$

b) $(F \subset G) \Leftrightarrow (F \cap \overline{G} = \phi)$

- Montrons en premier lieu l'implication : $(F \subset G) \Rightarrow F \cap \overline{G} = \phi$

Soit $x \in F$ Alors $x \in G$ (car $F \subset G$).

Mais : $(x \in G) \Leftrightarrow (x \notin \overline{G})$.

Donc $(\forall x \in F, x \notin G) \Leftrightarrow (F \cap \overline{G} = \phi)$.

Et par suite : $\boxed{(F \subset G) \Rightarrow (F \cap \overline{G} = \phi)}$

- Montrons à présent l'implication : $(F \cap \overline{G} = \phi) \Rightarrow (F \subset G)$.

Soit $x \in F$ Alors $x \notin \overline{G}$ (car $F \cap \overline{G} = \phi$).

$(x \notin \overline{G}) \Leftrightarrow (x \in G)$.

Donc : $(x \in F) \Rightarrow (x \in G)$ et par suite : $F \subset G$.

Finalement : $\boxed{(F \subset G) \Leftrightarrow (F \cap \overline{G} = \phi)}$

$(F \subset G) \Leftrightarrow (F \cap \overline{G} = \phi)$ et $(F \subset G) \Leftrightarrow (F \cap G = F)$, alors

On obtient : $\boxed{(F \subset G) \Leftrightarrow (F \cap \overline{G} = \phi) \Leftrightarrow (F \cap G = F)}$

Exercice 3:

Soient E un ensemble non vide et A et B deux de ses sous ensembles, établir :

1. $(A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$

2. $A - B = A \cap \overline{B}$

3. $(A \cap B = \phi) \Leftrightarrow (A \subset \overline{B})$

4. $(A \subset B) \Leftrightarrow (A - B = \phi)$

Solution :

1. $(A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$

- Montrons l'implication $(A \subset B) \Rightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})$

Soit $x \in \overline{B}$; $(x \in \overline{B}) \Leftrightarrow (x \notin B) \Rightarrow (x \notin A)$ (car $A \subset B$)

$(x \notin A) \Leftrightarrow (x \in \overline{A})$

donc : $(x \in B) \Rightarrow (x \in A)$ et par suite : $B \subset A$ et :

$\boxed{(A \subset B) \Rightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})}$

- Prouvons à présent l'implication : $(\overline{B} \subset \overline{A}) \Rightarrow (A \subset B)$

Soit $x \in A$; $(x \in A) \Leftrightarrow (x \notin \overline{A}) \Rightarrow (x \notin \overline{B})$ (car $\overline{B} \subset \overline{A}$).

$(x \notin \overline{B}) \Leftrightarrow (x \in B)$ donc $(x \in A) \Rightarrow (x \in B)$ et par suite $A \subset B$

et : $\boxed{(\overline{B} \subset \overline{A}) \Rightarrow (A \subset B)}$

finalement : $\boxed{(A \subset B) \Leftrightarrow (\overline{B} \subset \overline{A})}$

2. $A - B = A \cap \overline{B}$

- $A - B \subset A \cap \overline{B}$

Soit $x \in A - B$ alors $x \in A$ et $x \notin B$ donc :

$(x \in A$ et $x \in \overline{B}) \Leftrightarrow (x \in A \cap \overline{B})$ et par suite : $\boxed{A - B \subset A \cap \overline{B}}$

- Montrons à présent que : $A \cap \overline{B} \subset A - B$

$(x \in A \cap \overline{B}) \Leftrightarrow (x \in A$ et $x \in \overline{B}) \Leftrightarrow (x \in A$ et $x \notin B) \Leftrightarrow (x \in A - B)$

D'où : $\boxed{A \cap \overline{B} \subset A - B}$

finalement : $\boxed{A - B = A \cap \overline{B}}$

3. $(A \cap B = \phi) \Leftrightarrow (A \subset \overline{B})$

- Prouvons l'implication : $(A \cap B = \phi) \Rightarrow (A \subset \overline{B})$

Soit $x \in A$, alors $x \notin B$ (car $A \cap B = \phi$)

$(x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \overline{B})$ donc :

$(x \in A) \Rightarrow (x \in \overline{B})$ et par suite $A \subset \overline{B}$ et $\boxed{[A \cap B = \phi] \Rightarrow [A \subset \overline{B}]}$

- Montrons à présent l'implication : $[A \subset \overline{B}] \Rightarrow [A \cap B = \phi]$

Soit $x \in A$, alors $x \in \overline{B}$ (car $A \subset \overline{B}$).

$(x \in \overline{B}) \Leftrightarrow (x \notin B)$ Donc :

$\forall x \in A$, $x \notin B$ et par suit : $A \cap B = \phi$ et $\boxed{(A \subset \overline{B}) \Rightarrow [A \cap B = \phi]}$.

Finalement : $\boxed{(A \cap B = \phi) \Leftrightarrow (A \subset \overline{B})}$

4. $(A \subset B) \Leftrightarrow (A - B = \phi)$.

On a : $A - B = A \cap \overline{B}$ (voir 2eme question).

Montrons donc: $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap \overline{B} = \phi)$.

- $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap \overline{B} = \phi)$.

Soit $x \in A$, alors $x \in B$ $(A \subset B)$.

$(x \in B) \Leftrightarrow (x \notin \overline{B})$ donc $\forall x \in A, x \notin \overline{B}$ et donc : $A \cap \overline{B} = \phi$ et $(A \subset B) \Rightarrow (A \cap \overline{B} = \phi)$.

- $(A \cap \overline{B} = \phi) \Rightarrow (A \subset B)$

Soit $x \in A$ alors: $x \notin \overline{B}$ (car $A \cap \overline{B} = \phi$).

$(x \notin \overline{B}) \Leftrightarrow (x \in B)$. donc $(\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$ et par suite :

$A \subset B$ et $(A \cap \overline{B} = \phi) \Rightarrow (A \subset B)$.

Finalement : $\boxed{(A \subset B) \Leftrightarrow (A\text{-}B = \phi)}$

Exercice 4 :

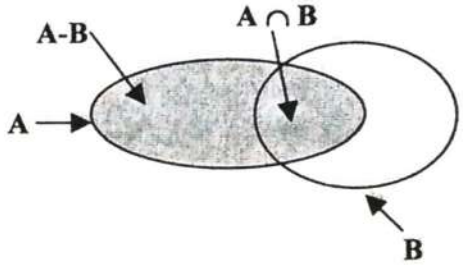
Soient E un ensemble non vide et A et B deux de ses sous ensembles. Etablir :

1. $A \cup B = (A - B) \cup B$. $(A\text{-}B) \cap B = \phi$.

2. $(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$.

3. $A - B \subset A$.

4. $(A - B = A) \Leftrightarrow (A \cap B = \phi)$.



Solution :

1. a) $A \cup B = (A - B) \cup B$.

- Montrons que $A \cup B \subset (A - B) \cup B$.

Soit $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$

Si $x \in A$ alors : ou bien $x \in B$ et par conséquent $x \in (A - B) \cup B$

(car $B \subset (A - B) \cup B$)

ou bien $x \notin B$ et donc $x \in (A\text{-}B)$ et par suite

$x \in (A\text{-}B) \cup B$ (car $(A\text{-}B) \subset (A\text{-}B) \cup B$)

donc $(x \in A) \Rightarrow (x \in (A\text{-}B) \cup B)$

si $x \in B$ alors $x \in (A\text{-}B) \cup B$ (car $B \subset (A\text{-}B) \cup B$)

donc $(x \in B) \Rightarrow (x \in (A\text{-}B) \cup B)$

finalement $(x \in A \cup B) \Rightarrow (x \in (A - B) \cup B)$

et $\boxed{A \cup B \subset (A\text{-}B) \cup B}$

- Montrons à présent que : $(A-B) \cup B \subset A \cup B$

soit $x \in (A-B) \cup B$ alors $x \in (A-B)$ ou $x \in B$

si $x \in (A-B)$ alors $(x \in A)$, $(x \in A) \Rightarrow (x \in A \cup B)$ car $(A \subset A \cup B)$

donc $(x \in A-B) \Rightarrow (x \in A \cup B)$

si $x \in B$ alors $x \in A \cup B$ (car $B \subset A \cup B$)

donc $(x \in B) \Rightarrow (x \in A \cup B)$

et par suite : $[(x \in (A-B) \cup B] \Rightarrow [x \in A \cup B]$

et $\boxed{(A-B) \cup B \subset A \cup B}$

finalement : $\boxed{(A-B) \cup B = A \cup B}$

b) $(A-B) \cap B = \phi$ car $\forall x \in (A-B)$, $x \in A$ et $x \notin B$

2. $(A-B) \cap (A \cap B) = \phi$

car $\forall x \in (A-B)$; $x \in A$ et $x \notin B$ et $(x \notin B) \Rightarrow (x \notin A \cap B)$

donc $\forall x \in (A-B)$, $x \notin (A \cap B)$ et par suite : $\boxed{(A-B) \cap (A \cap B) = \phi}$

3. $(A-B) \subset A$ car $\forall x \in (A-B)$, $x \in A$ et $x \notin B$

et $(x \in A$ et $x \notin B) \Rightarrow (x \in A)$ $[(P \text{ et } \phi) \Rightarrow P]$

donc $[x \in (A-B)] \Rightarrow [(x \in A)$ et $(A-B) \subset A]$

4. $(A-B = A) \Leftrightarrow (A \cap B = \phi)$

- Montrons l'implication : $(A-B = A) \Rightarrow (A \cap B = \phi)$

Soit $x \in A$, alors $x \in A-B$ (car $A = A-B$)

$(x \in A-B) \Leftrightarrow (x \in A$ et $x \notin B)$

Donc $(x \in A) \Rightarrow (x \notin B)$ et $\boxed{A \cap B = \phi}$

- Montrons à présent que : $[A \cap B = \phi] \Rightarrow [A-B = A]$

Remarquons qu'indépendamment de $A \cap B = \phi$,

On a toujours $A-B \subset A$ (voir 3eme question)

Prouvons alors : $(A \cap B = \phi) \Rightarrow (A \subset (A-B))$

soit $x \in A$, alors $x \notin B$ (car $A \cap B = \phi$)

donc $x \in (A-B)$ d'où $A \subset (A-B)$

Finalement : $\boxed{(A-B = A) \Leftrightarrow (A \cap B = \phi)}$

Exercice 5 :

Soient E un ensemble et A ,B,C trois de ses sous ensembles,établir :

1. $A \cap (B-C) = (A \cap B) - (A \cap C)$
2. $A-\overline{B} = A \cap B$
3. $\begin{cases} (A-B) \cap (B-A) = \phi \\ (A \cap B) \cap (B-A) = \phi \end{cases}$

Solution :

1.

- Montrons que $A \cap (B-C) \subset (A \cap B) - (A \cap C)$

soit $x \in A \cap (B-C)$ alors $x \in A$ et $x \in (B-C)$

$(x \in (B-C)) \Leftrightarrow (x \in B$ et $x \notin C)$ donc :

$[(x \in A$ et $x \in B)$ et $(x \in A$ et $x \notin C)] \Leftrightarrow [x \in (A \cap B)$ et $x \notin (A \cap C)]$

$\Leftrightarrow [x \in (A \cap B)-(A \cap C)]$

Donc $A \cap (B - C) \subset (A \cap B) - (A \cap C)$

- Montrons à présent : $(A \cap B) - (A \cap C) \subset A \cap (B-C)$

soit $x \in (A \cap B) - (A \cap C)$;

$[x \in (A \cap B) - (A \cap C)] \Leftrightarrow [x \in A, x \in B$ et $x \notin C] \Leftrightarrow [x \in A$ et $x \in (B-C)] \Leftrightarrow$

$[x \in A \cap (B-C)]$

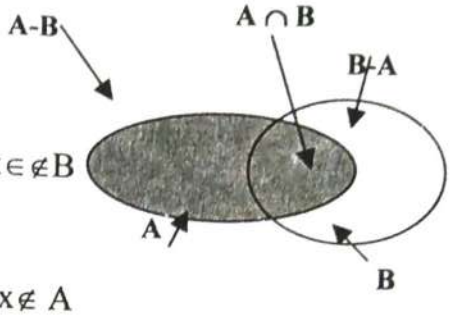
Donc $[x \in (A \cap B) - (A \cap C)]$, $[x \in (A \cap B) - (A \cap C)] \Rightarrow [x \in A \cap (B - C)]$

et $[(A \cap B) - (A \cap C)] \subset [A \cap (B - C)]$

Finalement : $\boxed{A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)}$

2. $A-\overline{B} = A \cap \overline{\overline{B}} = A \cap B$ (car $\overline{\overline{B}} = B$)

3.



a) $(A-B) \cap (B-A) = \phi$ car $\forall\, x \in (A-B)$, $x \in A$ et $x \notin B$

$(x \notin B) \Rightarrow (x \notin (B-A))$ donc $\boxed{(A-B) \cap (B-A) = \phi}$

b) $(A \cap B) \cap (B-A) = \phi$ car $\forall x \in (B-A)$, $x \in B$ et $x \notin A$

et $(x \in B$ et $x \notin A) \Rightarrow (x \notin A \cap B)$ donc :

$\forall\, x \in (B-A)$, $x \notin (A \cap B)$ et par suite : $\boxed{(A \cap B) \cap (B-A) = \phi}$

➲ **remarque :**

Le lecteur pourra verifier aisement que : $(A \cap B) \cap (A - B) = \phi$

Exercice 6 :

Soient A, B, C trois sous ensembles d'un ensemble E.

Etablir : $A - (B - C) = (A-B) \cup (A \cap C)$.

Solution :

- Montrons que $A-(B-C) \subset (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C)$ (car $(A - B) = A \cap \overline{B}$)

soit $x \in A-(B-C)$ alors ($x \in A$ et $x \in \overline{B-C}$) car $A - (B-C) = A \cap (\overline{B-C})$

$\overline{B-C} = \overline{B \cap \overline{C}} = \overline{B} \cup C$ car $\overline{\overline{C}} = C$

donc $(x \in A-(B-C)) \Rightarrow (x \in A$ et $x \in \overline{B} \cup C)$

$(x \in A$ et $x \in \overline{B} \cup C) \Leftrightarrow [(x \in A$ et $x \in \overline{B})$ ou $(x \in A$ et $x \in C)] \Rightarrow (x \in (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C))$

et par suite : $\boxed{A - (B - C) \subset (A - B) \cup (A \cap C)}$

- Montrons à présent que $(A - B) \cup (A \cap C) \subset A-(B-C)$

soit $x \in (A - B) \cup (A \cap C)$ alors $x \in (A - B)$ ou $x \in (A \cap C)$

Si $x \in (A-B)$ Alors : $(x \in A$ et $x \in \overline{B}) \Leftrightarrow (x \in A$ et $x \notin B)$

$(x \notin B) \Rightarrow (x \notin B \cap \overline{C})$.

Donc : $(x \in A \text{ et } x \notin B) \Rightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B \cap \overline{C})$.

$(x \in A \text{ et } x \notin B \cap \overline{C}) \Leftrightarrow (x \in A - (B \cap \overline{C}))$; $(A-(B-C) = A - (B \cap \overline{C}))$.

Donc : $(x \in A-B) \Rightarrow [x \in A - (B-C)]$.

Si : $x \in A \cap C$ alors $(x \in A \text{ et } x \in C) \Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \notin \overline{C})$.

$(x \notin \overline{C}) \Rightarrow (x \notin B \cap \overline{C})$.

Donc : $(x \in A \text{ et } x \notin \overline{C}) \Rightarrow (x \in A \text{ et } x \notin B \cap \overline{C})$.

$(x \in A \text{ et } x \notin B \cap \overline{C}) \Leftrightarrow [x \in A - (B \cap \overline{C})[\Leftrightarrow (x \in A-(B-C))$.

Donc : $(x \in A \cap C) \Rightarrow (x \in A - (B-C))$.

Finalement on a : $\boxed{(A-B) \cup (A \cap C) \subset A-(B-C)}$

Et par suite : $\boxed{A-(B-C) = (A - B) \cup (A \cap C)}$

➲ **remarque :**

On peut établir l'égalité $A-(B-C) = (A-B) \cup (A \cap C)$ en développant $A - (B-C)$

En effet $A-(B-C) = A \cap (\overline{B-C}) = A \cap (\overline{B \cap \overline{C}}) = A \cap (\overline{B} \cup C)$.

$A \cap (\overline{B} \cup C) = (A \cap \overline{B}) \cup(A \cap C) = (A-B) \cup (A \cap C)$

Exercice 7 :

Soient A, B, C Trois sous ensembles d'un même ensemble E.

Etablir, sans utiliser l'axiome d'extensionalité (Double inclusion) Les Egalités :

1. $A \cap (B-C) = (A \cap B)-C$.
2. $A \cup (B-C) = (A \cup B) - (C-A)$.
3. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A-C)$.
4. $A- (B \cup C) = (A-B) - C = (A - C) - B$.
5. $(B-A)-C= (A \cup B) - (A \cup C)$.

   $(C - A) - B = (A \cup C) - (A \cup B)$.

Solution :

1. $A \cap (B\text{-}C) = A \cap (B \cap \overline{C})$

$A \cap (B \cap \overline{C}) = (A \cap B) \cap \overline{C} = (A \cap B) - C$

Donc : $\boxed{A \cap (B\text{-}C) = (A \cap B) - C}$

2. $A \cup (B\text{-}C) = A \cup (B \cap \overline{C}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{C})$

$A \cup \overline{C} = (\overline{\overline{A} - C}) = (\overline{C \cap \overline{A}})$

Donc $\boxed{A \cup (B - C)} = (A \cup B) \cap (\overline{C \cap \overline{A}}) = (A \cup B) - (C \cap \overline{A}) = \boxed{(A \cup B) - (C - A)}$

3. $A\text{-}(B \cap C) = A \cap (\overline{B \cap C}) = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = (A - B) \cup (A\text{-}C)$

donc : $\boxed{A\text{-}(B \cap C) = (A - B) \cup (A\text{-}C)}$

4. $A - (B \cup C) = A \cap (\overline{B \cup C}) = A \cap (\overline{B} \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$

$(A \cap \overline{B}) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{C}) \cap \overline{B} = (A - B) - C = (A - C) - B$

donc : $\boxed{A - (B \cup C) = (A - B) - C = (A\text{-}C) - B}$

5.

- $(A \cup B) - (A \cup C) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cup C}) = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{C})$

$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{C}) = [(A \cup B) \cap \overline{A}] \cap \overline{C} = [(A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A})] \cap \overline{C}$

$[(A \cap \overline{A}) \cup (B \cap \overline{A})] \cap \overline{C} = (B \cap \overline{A}) \cap \overline{C} = (B - A) - C$

donc : $(A \cup B) - (A \cup C) = (B - A) - C$

- $(A \cup C) - (A \cup B) = (A \cup C) \cap (\overline{A \cup B}) = (A \cup C) \cap (\overline{A} \cap \overline{B})$

$(A \cup C) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) = [(A \cup C) \cap \overline{A}) \cap \overline{B} = [(A \cap \overline{A}) \cup (C \cap \overline{A})] \cap \overline{B} = (C \cap \overline{A}) \cap \overline{B}$ $(C \cap \overline{A}) \cap \overline{B} = (C\text{-}A)\text{-}B$

Donc : $\boxed{(A \cup C)\text{-}(A \cup B) = (C\text{-}A)\text{-}B}$

➲ remarque :

L'egalité $A \cap (B\text{-}C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ a été établie en exercice 5 question (1) ;

Dans cet exercice (7), il a été établi que : $A \cap (B\text{-}C) = (A \cap B) - C$. Ce qui logiquement, par transitivité de l'égalité entre ensembles, donne :

$(A \cap B)-C = (A \cap B) - (A \cap C) = A \cap (B - C)$

$A \cap (B-C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ traduit la distributivité de $\cap$ par rapport à (-) .

Exercice 8 :

Soient E un ensemble non vide et A,B deux de ses sous ensembles.

1. montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2. comparer $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$

$\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$.

3. developper $\overline{A - B}$ et $\overline{A} - \overline{B}$; comparer.

Solution :

1. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

- Montrons que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$.

Soit : $x \in \overline{A \cap B}$ alos $x \notin A \cap B$

$(x \notin A \cap B) \Leftrightarrow (x \notin A$ ou $x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B})$

$(x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}) \Leftrightarrow (x \in \overline{A} \cup \overline{B})$

donc $(x \in \overline{A \cap B}) \Rightarrow (x \in \overline{A} \cup \overline{B})$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}]$

- Montrons à présent que $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

soit $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ alors $(x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B})$

$(x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B}) \Leftrightarrow (x \notin A$ ou $x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \overline{A \cap B})$

donc $(x \in \overline{A} \cup \overline{B}) \Rightarrow (x \in \overline{A \cap B})$ et par suite : $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

finalement : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

- Prouvons que $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Soit $x \in \overline{A \cup B}$ alors $(x \notin A \cup B) \Leftrightarrow (x \notin A$ et $x \notin B)$

$(x \notin A$ et $x \notin B) \Leftrightarrow (x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}) \Leftrightarrow (x \in \overline{A} \cap \overline{B})$

d'où : $(x \in \overline{A \cup B}) \Rightarrow (x \in \overline{A} \cap \overline{B})$ et donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

- Montrons à présent que : $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

soit $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ alors ($x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$) $\Leftrightarrow$ ($x \notin A$ et $x \notin B$)

($x \notin A$ et $x \notin B$) $\Leftrightarrow$ ($x \notin A \cup B$) $\Leftrightarrow$ ($x \in \overline{A \cup B}$)

donc ($x \in \overline{A} \cap \overline{B}$) $\Rightarrow$ ($x \in \overline{A \cup B}$) et $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$

Finalement : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2. On a : $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ donc : $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ donc $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$

3. $\overline{A - B} = (\overline{A \cap \overline{B}}) = \overline{A} \cup B$ (car $\overline{\overline{B}} = B$)

$\overline{A} - \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{\overline{B}} = \overline{A} \cap B$, on a : $\overline{A} \cap B \subset \overline{A} \cup B$ donc: $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$

➲ **remarque :**

les égalités établies dans (1) sont communément appelées Formules de **Morgan**

Exercice 9 :

Soient E un ensemble non vide et A et B deux de ses sous ensembles .

1. montrer que $\overline{A \Delta B} = (A \cap B) \cup \overline{A \cup B}$

2. montrer que $\overline{A} \Delta \overline{B} = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$

3. montrer que $\overline{A \Delta B} \cap (\overline{A} \Delta \overline{B}) = \phi$

Solution :

1. $\overline{A \Delta B} = \overline{(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)} = (\overline{A \cap \overline{B}}) \cap (\overline{\overline{A} \cap B}) = (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$

$(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = [(\overline{A} \cup B) \cap A] \cup [(\overline{A} \cup B) \cap \overline{B}] =$

$[(\overline{A} \cap A) \cup (A \cap B)] \cup [(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B})]$

$[(\overline{A} \cap A) \cup (A \cap B)] \cup [(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B})] = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ car $(A \cap \overline{A}) = (B \cap \overline{B}) = \phi$

$(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) = (A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})$

donc $\overline{A \Delta B} = (A \cap B) \cup \overline{A \cup B}$

2. $\overline{A} \Delta \overline{B} = (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = [(\overline{A} \cap B) \cup \overline{B}] \cap [(\overline{A} \cap B) \cup A]$

$[(\overline{A} \cap B) \cup \overline{B}] \cap [(\overline{A} \cap B) \cup A] = [(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{B})] \cap [(\overline{A} \cup A) \cap (A \cup B)]$

$[(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (B \cup \overline{B})] \cap [(\overline{A} \cup A) \cap (A \cup B)] = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup B)$ car $A \cup \overline{A} = B \cup \overline{B} = E$

$(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (A \cup B) = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$

Donc $\overline{A} \Delta \overline{B} = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B}$

3. $(\overline{A \Delta B}) \cap (\overline{A} \Delta \overline{B}) = \phi$

Soit $x \in \overline{A \Delta B}$ alors $x \in (A \cap B) \cup \overline{A \cup B}$ (voir 1^{ére} question)

- Si $x \in (A \cap B)$ alors $x \notin \overline{A \cap B}$ et par suite $x \notin (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = \overline{A} \Delta \overline{B}$
- Si $x \in \overline{A \cup B}$ alors $x \notin (A \cup B)$ et par suite $x \notin (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = \overline{A} \Delta \overline{B}$.

Dans les deux cas on a alors : $(x \in \overline{A \Delta B}) \Rightarrow (x \notin \overline{A} \Delta \overline{B})$

et par conséquent : $(\overline{A \Delta B}) \cap (\overline{A} \Delta \overline{B}) = \phi$

Exercice 10 :

Soit E un ensemble non vide et A, B , C trois de ses sous ensembles.

I. Montrer que :

1. $A \Delta B = B \Delta A$.

2. $A \Delta \phi = A$

3. $A \Delta A = \phi$.

II. Montrer que :

1.a. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

1.b. $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

2. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

Solution :

I.

1. $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$.

2. $A \Delta \phi = (A - \phi) \cup (\phi - A) = A \cup \phi = A$

3. $A \Delta A = (A-A) \cup (A-A) = \phi \cup \phi = \phi$

II.

1.a. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

On a : $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = [(A \cap \overline{B}) \cup B] \cap [(A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}]$

$[(A \cap \overline{B}) \cup B] \cap [(A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}] = [(A \cup B) \cap (B \cup \overline{B})] \cap [(A \cup \overline{A}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})]$

$[(A \cup B) \cap (B \cup \overline{B})] \cap [(A \cup \overline{A}) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})] = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$ (car $A \cup \overline{A} = B \cup \overline{B} = E$)

$(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) = (A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) - (A \cap B)$

Donc : $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

1.b. $A \cap (B \Delta C) = A \cap [(B \cup C) - (B \cap C)] = [A \cap (B \cup C)] - [A \cap (B \cap C)]$

[distributivé de l'intersection par rapport à (-)] .

$[A \cap (B \cup C)] - [A \cap (B \cap C)] = [(A \cap B) \cup (A \cap C)] - [A \cap B) \cap (A \cap C)] = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

car : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$.

Donc : $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

2. rappelons que $\overline{A \Delta B} = (A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})$

$A \Delta (B \Delta C) = [A \cap (\overline{B \Delta C})] \cup [\overline{A} \cap (B \Delta C)]$

$A \Delta (B \Delta C) = [A \cap [(\overline{B \cup C}) \cup (B \cap C)]] \cup [\overline{A} \cap [(B \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B})]]$

$A \Delta (B \Delta C) = [A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})] \cup [A \cap (B \cap C)] \cup [\overline{A} \cap (B \cap \overline{C})] \cup [\overline{A} \cap (C \cap \overline{B})]$ ceci d'une part ;

d'autre part :

$(A \Delta B) \Delta C = [(A \Delta B) \cap \overline{C}] \cup [C \cap (\overline{A \Delta B})]$

$[(A \Delta B) \cap \overline{C}] \cup [C \cap (\overline{A \Delta B})] = [[(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})] \cap \overline{C}] \cup [C \cap [(A \cap B) \cup (\overline{A \cup B})]]$

$(A \Delta B) \Delta C = [A \cap (\overline{B} \cap \overline{C})] \cup [A \cap (B \cap C)] \cup [\overline{A} \cap (B \cap \overline{C})] \cup [\overline{A} \cap (C \cap \overline{B})]$

d'où l'égalité $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$. ($\cap$ est une opération commutative).

➲ **remarque** :

- L'égalité $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ traduit la distributivité de $\cap$ par rapport à Δ.
- L'égalité $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ traduit l'associativité de Δ.

Exercice 11 :

Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ une partie non vide de P (E) .

Montrer que les conditions :

(1)-a $E \in \mathcal{A}$.

(2)-a $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \Delta B \in \mathcal{A}$.

(3)-a $\forall A, B \in \mathcal{A} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$.

Sont équivalentes aux conditions :

(1)-b $\forall A, B \in \mathcal{A} \qquad A \cup B \in \mathcal{A}$.

(2)-b $\forall A \in \mathcal{A}\ C_E A \in \mathcal{A}$.

Solution :

Il s'agit de prouver que si $\mathcal{A}$ vérifie simultanement ((1)-a, (2)-a et (3)-a). Alors $\mathcal{A}$ Vérifie également ((1)-b et (2)-b) et Inversement.

- Montrons l'implication : [(1)-a ,(2)-a et (3)-a]$\Rightarrow$[(1)-b et (2)-b]

soit $A \in \mathcal{A}$ alors d'après (1)-a et (2)-a $E \Delta A \in \mathcal{A}$

or $E \Delta A = E - A = C_E A$

donc $\forall A \in \mathcal{A}\ C_E A \in \mathcal{A}$ (*) et par suite la condition (2)-b est vérifiée.

Soient $A, B \in \mathcal{A}$, alors d'après le résultat (*) précédent $C_E B, C_E A \in \mathcal{A}$

$(C_E A \in \mathcal{A}$ et $C_E B \in \mathcal{A}) \Rightarrow [(C_E A \cap C_E B) \in \mathcal{A}]$ d'après la condition (3)-a

or $C_E A \cap C_E B = C_E (A \cup B)$ (formule de Morgan)

donc $(A,B \in \mathcal{A}) \Rightarrow (C_E (A \cup B) \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{A})$ d'après le résultat (*) ci-dessus .

d'où: $(A \in \mathcal{A}\ ,B \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A \cup B \in \mathcal{A})$ et par suite la condition (2)-b est alors vérifiée.

Finalement : $\boxed{[(1)\text{-a et } (2)\text{-a et } (3)\text{-a}] \Rightarrow [(1)\text{-b et } (2)\text{-b}]}$

- Réciproquement : montrons l'implication : [(1)-b et (2)-b] $\Rightarrow$ [(1)-a,(2)-a et (3)-a]

$(\mathcal{A} \neq \phi) \Leftrightarrow (\exists X \in \mathcal{A})$:

Soit $X \in \mathcal{A}$ alors d'après (2)-b ($C_E X \in \mathcal{A}$) $\Rightarrow$ ($X \in \mathcal{A}$ et $C_E X \in \mathcal{A}$) $\Rightarrow$ ($X \cup C_E X \in \mathcal{A}$).

(D'après (1)-b) soit $E \in \mathcal{A}$ et par suite la condition (1)-a est alors vérifiée

soient $A,B \in \mathcal{A}$, alors d'après (2)-b : $C_E A$, $C_E B \in B$

($C_E A \in \mathcal{A}$ et $C_E B \in \mathcal{A}$) $\Rightarrow$ ($C_E A \cup C_E B) \in \mathcal{A}$) (d'après (1)-b)

or $C_E A \cup C_E B = C_E A \cap B$ donc ($A, B \in \mathcal{A}$) $\Rightarrow$ ($C_E (A \cap B) \in \mathcal{A}$) $\Rightarrow$ ($A \cap B \in \mathcal{A}$)

(d'après (2) –b encore une fois)

et par suite : ($A,B \in \mathcal{A}$) $\Rightarrow$ ($A \cap B \in \mathcal{A}$) et la condition (3)-a est alors vérifée

Soient $A,B \in \mathcal{A}$ alors d'après (2)-b [$C_E A \in \mathcal{A}$ et $C_E B \in \mathcal{A}$]

[$C_E A \in \mathcal{A}$ et $C_E B \in \mathcal{A}$] $\Rightarrow$ [$A \cap C_E B \in \mathcal{A}$ et $B \cap C_E A \in \mathcal{A}$]

(d'après (3)-a vérifiée)

Soit $(A-B) \in \mathcal{A}$ et $(B-A) \in \mathcal{A}$,

[$(A-B) \in \mathcal{A}$ et $(B-A) \in \mathcal{A}$] $\Rightarrow$ [$(A-B) \cup (B-A) \in \mathcal{A}$] d'après (1)-b soit $A \Delta B \in \mathcal{A}$.

Donc ($A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{A}$) $\Rightarrow$ ($A \Delta B \in \mathcal{A}$) et la condition (2)-a est alors vérifiée.

Finalement [(1)-b et (2)-b] $\Rightarrow$ [(1)-a,(2)-a et (3)-a] et

Donc : $\boxed{\text{[(1)-a,(2)-a et (3)-a]} \Leftrightarrow \text{[(1)-b et (2)-b]}}$

➲ commentaire :

Les conditions (1)-a ,(2)-a et (3)-a équivalentes aux conditions (1)-b et (2)-b caractérisent les algèbres de BOOLE de parties d'un ensemble non vide donné E .
Ce sont des sous anneaux unitaires et booléens de l'Anneau Booléen (P (E), Δ , $\cap$) au sens Algèbrique du terme.
La structure Booléenne de(P (E), Δ , $\cap$) à été établie en exercice 10.
Un autre exemple d'Algèbre de Boole de parties d'un ensemble non vide sera traité en «exercice 9 chapitre applications section V» et concerne l'ensemble $\mathcal{A}$:
$\mathcal{A} = \{A \in P(E), f^{-1} f(A) = A\}$

Exercice 12 :

Soient $(A_n)_{n \in N^*}$ et $(B_n)_{n \in N^*}$ deux familles de sous ensembles de R telles que :
$\forall n \in N^* : A_n = \left]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right[$ et $B_n = \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$

1. montrer que (A_n) et (B_n) sont deux recouvrements de $]0,1[$

2.a. $\{(A_n)_{n\in N^*}\}$ est-elle une partition de $]0,1[$?

b. $\{(B_n)_{n\in N^*}\}$ est-elle une partition de $]0,1[$?

Solution :

1. appelons $(U_n)_{n\in N^*}$, $(V_n)_{n\in N^*}$ et $(W_n)_{n\in N^*}$, les suites : $(\frac{1}{n+2})_{n\in N^*}$, $(\frac{1}{n+1})_{n\in N^*}$ et $(\frac{1}{n})_{n\in N^*}$

Ces trois suites sont toutes des suites décroissantes à termes strictement positifs et par suite :

$\text{Lim } U_n = \text{Inf}(U_n) = 0$

Et $\forall n \in N^*$: $W_n \leq W_1 = 1$.

Donc $\bigcup_{n\in N^*} A_n =]\text{Inf}_{n\in N^*} U_n, \text{Sup}_{n\in N^*} W_n[=]0,1[$. Ceci d'une part.

D'autre part : $\text{Lim } V_n = \text{Inf}(V_n) = 0$ donc comme pour la suite (U_n) :

$\bigcup_{n\in N^*} B_n =]\text{Inf}_{n\in N^*} V_n, \text{Sup}_{n\in N^*} W_n[=]0,1[$.

2.a. $\{(A_n)_{n\in N^*}\}$ n'est pas une partition de $]0,1[$ car :

$A_1 =]1/3, 1[$; $A_2 =]1/4, 1/2[$ et $]1/3, 1[\cap]1/4, 1/2[=]1/3, 1/2[\neq \phi$

i,e : $A_1 \cap A_2 \neq \phi$ (A_1 et A_2 ne sont pas disjoints. En général $(A_{n+1} \cap A_n) \neq \phi$)

2.b. $\{(B_n)_{n\in N^*}\}$ est une partition de $]0,1[$ car :

$\forall n \in N^*$: $B_{n+1} =]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}[$; $B_n =]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ et $B_{n+1} \cap B_n = \phi$

En plus du fait que $B_n \neq \phi$ car $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$

➲ remarque :

Il est clair que $B_n \cap B_{n+1} = \phi$ entraine que $\forall (n_1,n_2) \in N^{*2}$: $n_1 \neq n_2$: $B_{n_1} \cap B_{n_2} = \phi$

Exercice 13 :

soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux recouvrements respectifs de A et B

1. Montrer que $(A_i \times B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est un recouvrement de $A\times B$.

2. Montrer que $\forall(i_1,i_2) \in I^2$ et $\forall(j_1,j_2) \in J^2$ on a : $(A_{i_1} x B_{j_1}) \cap (A_{i_2} x B_{j_2}) = (A_{i_1} \cap A_{i_2}) x (B_{j_1} \cap B_{j_2})$

En déduire que si $\{(A_i)_{i\in I}\}$ et $\{(B_j)_{j\in J}\}$ sont deux partitions respectives de A et B alors : $\{(A_i x B_j)_{(i,j)\in I x J}\}$ et une partition de $A \times B$.

Solution :

1. $[(A_i)_{i\in I}$ recouvre $A] \Leftrightarrow [A \subset \bigcup_{i\in I} A_i]$ (1)

$[(B_j)_{j\in J}$ recouvre $B] \Leftrightarrow [B \subset \bigcup_{j\in J} B_j]$ (2)

$[(1) \text{ et } (2)] \Rightarrow [A \times B \subset \bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j]$

- Montrons à présent que : $\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j$

Soit $(x,y) \in \bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j$ alors $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ et $y \in \bigcup_{j\in J} B_j$.

$[x \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ et } y \in \bigcup_{j\in J} B_j] \Leftrightarrow [\exists(i_0,j_0) \in I\times J : x \in A_{i_0} \text{ et } y \in B_{j_0}]$

$(x \in A_{i_0} \text{ et } y \in B_{j_0}) \Leftrightarrow ((x,y) \in A_{i_0} \times B_{j_0}) \Rightarrow ((x,y) \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j)$

D'où : $\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j$

- Soit $(x,y) \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j$ alors $[\exists(i_0,j_0) \in I\times J : (x,y) \in A_{i_0} \times B_{j_0}]$

$[(x,y) \in A_{i_0} \times B_{j_0}] \Leftrightarrow [x \in A_{i_0} \text{ et } y \in B_{j_0}] \Rightarrow [x \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ et } y \in \bigcup_{j\in J} B_j]$ [car $A_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ et $B_{j_0} \subset \bigcup_{j\in J} B_j$]

$[x \in \bigcup_{i\in I} A_i \text{ et } y \in \bigcup_{j\in J} B_j] \Leftrightarrow [(x,y) \in \bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j]$

donc $[(x,y) \in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j] \Rightarrow [(x,y) \in \bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j]$

Et par suite : $\bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j \subset \bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j$

Finalement : $\bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j = \bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j$

et $(A_i x B_j)_{(i,j)\in I x J}$ recouvre $A x B$.

2. soient $(i_1,i_2) \in I^2$ et $(j_1,j_2) \in J^2$ et montrons que : $(A_{i_1} x B_{j_1}) \cap (A_{i_2} x B_{j_2}) = (A_{i_1} \cap A_{i_2}) x (B_{j_1} \cap B_{j_2})$

- soit $(x,y) \in (A_{i_1} \times B_{j_1}) \cap (A_{i_2} \times B_{j_2})$ alors

$[x \in (A_{i_1} \cap A_{i_2})$ et $y \in (B_{j_1} \cap B_{j_2})] \Leftrightarrow [(x,y) \in (A_{i_1} \cap A_{i_2}) \times (B_{j_1} \cap B_{j_2})]$

donc $[(x,y) \in (A_{i_1} \times B_{j_1}) \cap (A_{i_2} \times B_{j_2})] \Rightarrow [(x,y) \in (A_{i_1} \cap A_{i_2}) \times (B_{j_1} \cap B_{j_2})]$

Et par suite : $(A_{i_1} \times B_{j_1}) \cap (A_{i_2} \times B_{j_2}) \subset (A_{i_1} \cap A_{i_2}) \times (B_{j_1} \cap B_{j_2})$

- Montrons à présent l'inclusion : $(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \times (B_{j_1} \cap B_{j_2}) \subset (A_{i_1} \times B_{j_1}) \cap (A_{i_2} \times B_{j_2})$

soit $(x,y) \in (A_{i_1} \cap A_{i_2}) \times (B_{j_1} \cap B_{j_2})$ alors :

$[(x \in A_{i_1}$ et $y \in B_{j_1})$ et $(x \in A_{i_2}$ et $y \in B_{j_2})] \Leftrightarrow [(x,y) \in (A_{i_1} \times B_{j_1})$ et $(x,y) \in (A_{i_2} \times B_{j_2})]$

$[(x,y) \in (A_{i_1} \times B_{j_1})$ et $(x,y) \in (A_{i_2} \times B_{j_2})] \Leftrightarrow [(x,y) \in (A_{i_1} \times B_{j_1}) \cap (A_{i_2} \times B_{j_2})]$

donc $[(x,y) \in (A_{i_1} \cap A_{i_2}) \times (B_{j_1} \cap B_{j_2})] \Rightarrow [(x,y) \in (A_{i_1} \times B_{j_1}) \cap (A_{i_2} \times B_{j_2})]$

Et $(A_{i_1} \times B_{j_1}) \cap (A_{i_2} \times B_{j_2}) \subset (A_{i_1} \cap A_{i_2}) \times (B_{j_1} \cap B_{j_2})$

Finalement : $(A_{i_1} \times B_{j_1}) \cap (A_{i_2} \times B_{j_2}) = (A_{i_1} \cap A_{i_2}) \times (B_{j_1} \cap B_{j_2})$

3. $\{(A_i)_{i \in I}\}$ et $\{(B_j)_{j \in J}\}$ partitions respectives de A et B

on a : $\forall (i,j) \in I \times J : A_i \neq \phi, B_j \neq \phi$

Donc $A_i \times B_j \neq \phi$ (1)

$A \times B = \bigcup_{i \in I} A_i \times \bigcup_{j \in J} B_j = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j$ (voir (1))

Donc $\bigcup_{(i,j) \in I \times J} A_i \times B_j = A \times B$ (2)

Si $A_{i_1} \cap A_{i_2} = \phi$ et $B_{j_1} \cap B_{j_2} = \phi$ pour $i_1 \neq i_2$ et $j_1 \neq j_2$.

Alors $(A_{i_1} \times B_{j_1}) \cap (A_{i_2} \times B_{j_2}) = (A_{i_1} \cap A_{i_2}) \times (B_{j_1} \cap B_{j_2})$

$\phi \times \phi = \phi$

donc $\forall i_1, i_2, j_1, j_2 : i_1 \neq i_2 ; j_1 \neq j_2$

$(A_{i_1} \times B_{j_1}) \cap (A_{i_2} \times B_{j_2}) = \phi$ (3)

$[(1),(2)$ et$(3)] \Leftrightarrow [\{(A_i \times B_j)_{(i,j) \in I \times J}\}]$ est une partition de $A \times B$

➲ **commentaire :**

- La réciproque de (1) est evidemment vraie, c'est à dire que :

Si $\{(A_i \times B_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ est un recouvrement de $A\times B$, alors $(A_i)_{i\in I}$ recouvre A et $(B_j)_{j\in J}$ recouvre B

En effet : $(A\times B) \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j = \bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j$ entraine que :

$[(A\times B) \subset \bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j] \Leftrightarrow [A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ et $B \subset \bigcup_{j\in J} B_j]$

d'où $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ recouvrent respectivement A et B

finalement : on a l'equivalence :

$[(A_i\times B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ recouvre $A\times B] \Leftrightarrow [(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ recouvrent respectivement A et B]

- La réciproque de (3) est fausse c'est à dire :

Si $\{(A_i\times B_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ est une partition de $A\times B$, alors $\{(A_i)_{i\in I}\}$ et $\{(B_j)_{j\in J}\}$ ne sont pas forcément deux partitions de A et B.

En effet : $\{(A_i\times B_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ est une partition de $A\times B$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (i,j) \in I\times J : A_i\times B_j \neq \phi \\ \forall (i_1,j_1), (i_2,j_2) \in I\times J : (A_{i_1}\times B_{j_1}) \cap (A_{i_2}\times B_{j_2}) = \phi \quad (\text{pour } i_1 \neq i_2 \text{ et } j_1 \neq j_2) \end{cases}$$

$(A_i\times B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ recouvre $A\times B$.

on a : $[(A_i\times B_j) \neq \phi] \Leftrightarrow [A_i \neq \phi$ et $B_j \neq \phi]$

$[(A_{i_1}\times B_{j_1}) \cap (A_{i_2}\times B_{j_2})] = \phi \Leftrightarrow [(A_{i_1} \cap A_{i_2}) \times (B_{j_1} \cap B_{j_2})] = \phi \Leftrightarrow [A_{i_1} \cap A_{i_2} = \phi$ ou $B_{j_1} \cap B_{j_2} = \phi]$

donc on a : ou $\{(A_i)_{i\in I}\}$ est une partition de A ou $\{(B_j)_{j\in J}\}$ est une partition de B

➲ **conclusion**:

$[\{(A_i\times B_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ est une partition de $A\times B] \Rightarrow [\{(A_i)_{i\in I}\}$ est une partition de A ou $\{(B_j)_{j\in J}\}$ est une partition de B]

Exercice 14:

Soient A, B, C et D quatre ensembles .

1. Montrer que $(A\times B) \cap (C\times D) = (C\times B) \cap (A\times D)$

2. Montrer que $(A\times B) \cap (C\times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$

3.a. développer $(A \cup B) \cap (C \cup D)$

b. comparer $(A \cap C) \cup (B \cap D)$ et $(A \cup B) \cap (C \cup D)$

Solution :

1. $(A\times B)\cap(C\times D) = (C\times B)\cap(A\times D)$

- Montrons que $(A\times B)\cap(C\times D) \subset (C\times B)\cap(A\times D)$

$[(x,y) \in (A\times B)\cap(C\times D)] \Leftrightarrow [x\in(A\cap C) \text{ et } y\in(B\cap D)] \Leftrightarrow [(x\in A \text{ et } y\in D) \text{ et } (x\in C \text{ et } y\in B)]$ $[(x\in A \text{ et } y\in D) \text{ et } (x\in C \text{ et } y\in B)] \Leftrightarrow [(x,y) \in (A\times D)\cap(C\times B)]$

D'où :$(A\times B)\cap(C\times D) \subset (C\times B)\cap(A\times D)$ (1)

- Montrons maintenant l'inclusion : $(C\times B)\cap(A\times D) \subset (A\times B)\cap(C\times D)$

$[(x,y) \in (C\times B)\cap(A\times D)] \Leftrightarrow [x\in(A\cap C) \text{ et } y\in(B\cap D)] \Leftrightarrow [(x\in A \text{ et } y\in B) \text{ et } (x\in C \text{ et } y\in D)]$

$[(x\in A \text{ et } y\in B) \text{ et } (x\in C \text{ et } y\in D)] \Leftrightarrow [(x,y) \in (A\times B)\cap(C\times D)]$

D'où :$(C\times B)\cap(A\times D) \subset (A\times B)\cap(C\times D)$ (2)

$\boxed{[(1) \text{ et } (2)] \Leftrightarrow [(A\times B)\cap(C\times D) = (C\times B)\cap(A\times D)]}$

2. $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)$

- Montrons l'inclusion : $(A\times B)\cap(C\times D) \subset (A\cap C)\times(B\cap D)$

$[(x,y) \in (A\times B)\cap(C\times D)] \Leftrightarrow [x\in(A\cap C) \text{ et } y\in(B\cap D)] \Leftrightarrow [(x,y) \in (A\cap C)\times(B\cap D)]$.

D'où $(A\times B)\cap(C\times D) \subset (A\cap C)\times(B\cap D)$ (1)

- Montrons que $(A\cap C)\times(B\cap D) \subset (A\times B)\cap(C\times D)$

$[(x,y) \in (A\cap C)\times(B\cap D)] \Leftrightarrow [x\in(A\cap C) \text{ et } y\in(B \cap D)] \Leftrightarrow [(x\in A \text{ et } y\in B) \text{ et } (x\in C \text{ et } y\in D)]$

$[(x\in A \text{ et } y\in B) \text{ et } (x\in C \text{ et } y\in D)] \Leftrightarrow [(x,y)\in (A \times B) \cap (C \times D)]$.

D'où :$(A\cap C)\times(B\cap D) \subset (A\times B)\cap(C\times D)$ (2)

$\boxed{[(1) \text{ et } (2)] \Leftrightarrow [(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D)].}$

➲ remarque:

par transitivité, on obtient : $(A\times B)\cap(C\times D) = (A\cap C)\times(B\cap D) = (C\times B)\cap(A\times D)$

3.a. $(A\cup B)\cap(C\cup D) = [(A\cup B)\cap C]\cup[(A\cup B)\cap D] = [(A\cap C)\cup(B\cap C)]\cup[(A\cap D)\cup(B\cap D)]$

3.b. $(A\cap C) \subset (A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(B\cap D) \subset (A\cap D)\cup(B\cap D)$

D'où : $(A\cap C)\cup(B\cap D) \subset [(A\cap C)\cup(B\cap C)]\cup[(A\cap D)\cup(B\cap D)]$

Et par suite :$(A\cap C)\cup(B\cap D) \subset (A\cup B)\cap(C\cup D)$

Exercice 15 :

Soient E un ensemble non vide et A et B deux de ses sous ensembles.

Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ deux familles recouvrant A et B respectivement.

1. Montrer que:

a. $\bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j$

et que :

b. $\bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j$

en déduire que:

c. $(A_i \cup B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ et $(A_i \cap B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ recouvrent respectivement $(A \cup B)$ et $(A \cap B)$.

2. on considère à présent que :

$\{(A_i)_{i\in I}\}$et $\{(B_j)_{j\in J}\}$ sont deux partitions respectives de A et B, pourquoi$\{(A_i \cup B_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ et $\{(A_i \cap B_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ne sont–elles pas des partitions respectives de $(A \cup B)$ et $(A \cap B)$?

3. A quelle condition $\{(A_i \cup B_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ et $\{(A_i \cap B_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ représenteraient-elles des partitions respectives de $(A \cup B)$ et $(A \cap B)$?

4. Considérons $(A_i)_{i\in I}$ et $(A'_j)_{j\in J}$ deux recouvrements du même ensemble A.

a. Montrer que $(A_i \cup A'_j)_{(i,j)\in I\times J}$ et $(A_i \cap A'_j)_{(i,j)\in I\times J}$ sont deux recouvrementsde A.

Si $\{(A_i)_{i\in I}\}$et $\{(A'_j)_{j\in J}\}$sont deux partitions de A, à quelle condition $\{(A_i \cup A'_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ et $\{(A_i \cap A'_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$le sont-elles?

Solution :

1.

a. $\bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j$

- Montrons d'abord que : $\bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J} B_j \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j$

$[x\in \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J} B_j] \Leftrightarrow [x\in \bigcup_{i\in I} A_i$ ou $x\in \bigcup_{j\in J} B_j] \Leftrightarrow [\exists i_0\in I: x\in A_{i_0}$ ou $\exists j_0\in J: x\in B_{j_0}] \Rightarrow [x\in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j]$

car $A_{i_0} \subset \bigcup_{j\in J} B_j \cup A_{i_0} \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j$ ou $B_{j_0} \subset B_{j_0} \cup \bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j$

D'où : $\bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J} B_j \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j$ (1)

- Prouvons à présent l'inclusion : $\bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j \subset \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J} B_j$

$[x\in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j] \Leftrightarrow [\exists (i_0,j_0)\in I\times J : x\in A_{i_0} \cup B_{j_0}] \Leftrightarrow [x\in \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J} B_j]$ car $A_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ et

$B_{j_0} \subset \bigcup_{j\in J} B_j$

$\bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j \subset \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J} B_j$ (2)

Finalement: $[(1) \text{ et } (2)] \Leftrightarrow [\bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j = \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J} B_j]$

1.b. $\bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j$

- Montrons que : $\bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j$

$[x\in \bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j] \Leftrightarrow [\exists (i_0,j_0)\in I\times J : x\in A_{i_0} \cap B_{j_0}] \Rightarrow [x\in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j]$ car : $A_{i_0} \cap B_{j_0} \subset$

$\bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j$

donc : $\bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j$ (1)

- Prouvons à présent l'inclusion : $\bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j \subset \bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j$.

$[x\in \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j] \Leftrightarrow [\exists (i_0,j_0)\in I\times J : x\in A_{i_0} \cap B_{j_0}] \Leftrightarrow [\exists (i_0,j_0)\in I\times J: x\in A_{i_0}$ et $x\in B_{j_0}]$

$[\exists (i_0,j_0)\in I\times J: x\in A_{i_0}$ et $x\in B_{j_0}] \Rightarrow [x\in \bigcup_{i\in I} A_i$ et $x\in \bigcup_{j\in J} B_j] \Leftrightarrow [x\in \bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j]$

d'où : $\bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j \subset \bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j$. (2)

Finalement : $[(1) \text{ et } (2)] \Leftrightarrow [\bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j]$

1.c $\left.\begin{array}{l} A\subset \bigcup_{i\in I} A_i \\ \text{et} \\ B\subset \bigcup_{j\in J} B_j \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A\cup B \subset \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j \\ \text{et} \\ A\cap B \subset \bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j \end{array}\right.$

Donc : $(A_i \cup B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ recouvre $(A\cup B)$ et $(A_i \cap B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ recouvre $(A\cap B)$.

2. $\{(A_i \cup B_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ n'est pas une partition de $A\cup B$ car pour $(i_1,i_2)\in I^2$,$(j_1,j_2)\in J^2$ on a :

$(Ai_1\cup Bj_1) \cap (Ai_2\cup Bj_2) = (Ai_1\cap Ai_2) \cup (Bj_2\cap Ai_1) \cup (Bj_1\cap Bj_2) \cup (Bj_1\cap Ai_2) =$

$(Bj_1\cap Ai_2) \cup (Ai_1\cap Bj_2)$ car $(Ai_1\cap Ai_2) = (Bj_1\cap Bj_2) = \phi$

$(Bj_1\cap Ai_2) \cup (Ai_1\cap Bj_2)$ peut ne pas être vide (Il suffit de prendre $Bj_1\cap Ai_2\neq \phi$ ou $Ai_1\cap Bj_2 \neq \phi$)

- $\{(Ai\cap Bj)_{(i,j)\in I\times J}\}$ n'est pas une partition de $A\cap B$ car il est possible que pour $(i_0,j_0)\in I\times J$: $Ai_0\cap B\, j_0 \neq \phi$

3.a. Si $\forall(i,j)\in I\times J, i \neq j$ $Ai\cap Bj = \phi$

alors : pour $(i_1,i_2)\in I^2$: $i_1\neq i_2$ et $(j_1,j_2)\in J^2$:$j_1\neq j_2$.

on a $(Ai_1\cup Bj_1) \cap (Ai_2\cup Bj_2) = (Ai_1\cap Ai_2) \cup ((Bj_1\cap Ai_2)\cup(Ai_1\cap Bj_2)\cup(Bj_1\cap Bj_2)$

$(Ai_1\cup Bj_1) \cap (Ai_2\cup Bj_2) = \phi \cup \phi \cup \phi \cup \phi =\phi$

et $\forall(i,j)\in I\times J$, $Ai\cup Bj \neq \phi$ (car $Ai \neq \phi$,$Bj \neq\phi$)

donc $\{(Ai \cup Bj)\ (i,j)\in I\times J\}$ est une partition de $A\cup B$

(3) b) si $\forall(i,j)\in I\times J$ et $i\neq j$ $Ai\cap Bj \neq \phi$ alors,

on a pour $(i_1,i_2)\in I^2$, $(j_1,j_2)\in J^2$: $i_1\neq i_2$, $j_1\neq j_2$:

$(Ai_1\cap Bj_1) \cap (Ai_2\cap Bj_2) = (Ai_1\cap Ai_2) \cap (Bj_1\cap Bj_2) =\phi \cap\phi =\phi$

et $A\cap B = \bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j$

donc : $\{(A_i\cap B_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ est une partition de $A\cap B$.

➲ remarque :

Dans (a) et (b) il a été tenu compte que $\{(A_i)_{i\in I}\}$ et $\{(B_j)_{j\in J}\}$ sont deux partitions respectives de A et B et notament : $\bigcup_{i\in I} A_i = A$: $\bigcup_{j\in J} B_j = B$

Pour $(i_1,i_2)\in I^2,(j_1,j_2)\in J^2$: $i_1\neq i_2$,$j_1\neq j_2$.

$Ai_1\cap Ai_2 = \phi$, $Bj_1\cap Bj_2 = \phi$; $\forall(i,j)\in I\times J$: $Ai \neq\phi$, $Bj \neq \phi$.

4.a.

$$\left.\begin{array}{l} A\subset \bigcup_{i\in I} A_i \\ \quad\text{et} \\ A\subset \bigcup_{j\in J} A'_j \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A\subset \bigcup_{i\in I} A_i \cup \bigcup_{j\in J} A'_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup A'_j. \\ \qquad\qquad\text{et} \\ A\subset \bigcup_{i\in I} A_i \cap \bigcup_{j\in J} A'_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap A'_j \end{array}\right.$$

Donc si $(A_i)_{i\in I}$ et $(A'_j)_{j\in J}$ sont deux recouvrements de A, alors $(A_i\cup A'_j)_{(i,j)\in I\times J}$ et $(A_i\cap A'_j)_{(i,j)\in I\times J}$ sont deux autres recouvrements de A.

4.b. comme dans (3) si $\{(A_i)_{i\in I}\}$et $\{(A'_j)_{j\in J}]$ sont deux partitions de A et si :

$\forall(i,j)\in I\times J$: $i\neq j$, $A_i\cap A'_j = \phi$; Alors $\{(A_i\cup A'_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$est une partition de A.

Et que : si $\forall(i,j)\in I\times J$, $A_i\cap A'_j = \phi$ alors $\{(A_i\cup A'_j)_{(i,j)\in I\times J}\}$ est une partition de A

➲ commentaire :

- $(A_i\cup B_j)_{(i,j)\in I\times J}$.recouvre $(A\cup B)$ et $(A_i\cup B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ recouvre $(A\cap B)$ n'entrainent pas que :

$(A_i)_{i\in I}$ recouvre A et $(B_j)_{j\in J}$ recouvre B, considerer : I=J={1,2}

$A_1=\{1,2\}$; $B_1=\{3\}$, $A=\{5,0\}$.

$A_2 = \{0,4\}$; $B_2 =\{5\}$, $B =\{5,4\}$

$A\cup B =\{5,0,4\}$

$$\bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cup B_j = (A_1\cup B_1) \cup (A_1 \cup B_2) \cup (A_2 \cup B_1) \cup (A_2\cup B_2) = \{0 ,1,2,3,4,5\}.$$

On a : $A\cup B \subset (A_i \cup B_j)_{(i,j)\in I\times J}$.

$(A_i \cup B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ recouvre $A\cup B$.

Mais $A\not\subset \bigcup_{i\in I} A_i = A_1\cup A_2$ car $5\notin A_1\cup A_2$ et $B\not\subset \bigcup_{j\in J} B_j=B_1\cup B_2$ car $4 \notin B_1\cup B_2$.

- Le contre exemple suivant montre $(A\cap B)$ recouvert par $(A_i\cap B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ et A non recouvert Par $(A_i)_{i\in I}$ et B non recouvert par $(B_j)_{j\in J}$.

Considerer : I=J={1,2}

$A= \{1,2,4\}$; $B = \{6\}$; $A_1 = \{3,4\}$; $A_2= \{0,2\}$; $B_1 = \{4,5\}$; $B_2 = \{0,3\}$.

Nous avons: $A_1 \cap B_1 = \{4\}$; $A_1 \cap B_2 = \{3\}$; $A_2 \cap B_1 = \phi$; $A_2 \cap B_2 = \{0\}$;

$\bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j = \{0,3,4\}$; $A \cap B = \phi$

On a : $A \cap B \subset \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \cap B_j$

Mais : $A_1 \cup A_2 = \{0,2,3,4\}$

$A \not\subset A_1 \cup A_2$ car $1 \in A$ et $1 \notin (A_1 \cup A_2)$

$B_1 \cup B_2 = \{0,3,4,5\}$ et $B \not\subset B_1 \cup B_2$ car $6 \in B$ et $6 \notin (B_1 \cup B_2)$.

CHAPITRE A SECTION 1

(11 Exercices, 27 Questions)

- Généralités.
- Injections – surjections – bijections – restriction.
- Compositions - égalité.
- Noyau d'une application.

Exercice 1:

Soient E et F deux ensembles non vides et x_1 et x_2 deux parties non vides de E.

On donne $f_1 : x_1 \to F$ et $f_2 : x_2 \to F$ deux applications

1. Montrer que pour qu'il existe une application $f : x_1 \cup x_2 \to F$ telle que:

$f/x_1 = f_1$ et $f/x_2 = f_2$ il faut et il suffit que : $\forall x \in x_1 \cap x_2 \ : f_1(x) = f_2(x)$

2. Généraliser au cas d'une famille $(x_i)_{i\in I}$ $\forall i \in I$: $x_i \subset E$, et une famille $(f_i)_{i\in I}$ d'applications telle que:

$\forall i \in I$: $f_i : x_i \to F$ et $\forall (i,j) \in I^2 : i \neq j \ \ \forall x \in x_i \cap x_j$: $f_i(x) = f_j(x)$.

Solution :

1.

a) supposons que : $\forall x \in x_1 \cap x_2$ on ait $f_1(x) = f_2(x)$

et montrons qu'il existe $f : x_1 \cup x_2 \to F$ telle que : $f/x_1 = f_1$ et $f/x_2 = f_2$

considérons $f : x_1 \cup x_2 \to F$

$$x \to \begin{cases} f_1(x) \text{ si } x \in x_1 \\ \\ f_2(x) \text{ si } x \in x_2 \end{cases}$$

f est une application car tout element x de $x_1 \cup x_2$ est en relation avec un element unique y de F.

En effet:

Si $x \in x_1 \cap x_2$ $\ f_1(x) = f_2(x) = f(x)$

x a une image unique par f , les deux images de x par f_1 et f_2 coincident .

Si $x \in x_1 - x_2$: x admet une seule image $f_1(x)$

Si $x \in x_2 - x_1$: x admet une seule image $f_2(x)$

b) supposons que $f : x_1 \cup x_2 \to F$ soit une application telle que :

$f/x_1 = f_1$ et $f/x_2 = f_2$ sont ses restrictions à x_1 et x_2 respectivement et montrons que : $\forall x \in x_1 \cap x_2 \ f_1(x) = f_2(x)$.

$(x \in x_1 \cap x_2) \Rightarrow (x \in x_1 \text{ et } x \in x_2)$

$(x\in x_1)\Leftrightarrow (f_1(x)= f(x))$ (car f_1 est restriction de f à x_1)

$(x\in x_2)\Leftrightarrow (f_2(x)= f(x))$ (car f_2 est restriction de f à x_2)

par transitivité : $f_1(x)=f_2(x)$ donc $\forall x\in x_1\cap x_2 : f_1(x)= f_2(x)$.

2. Généralisation : soit $(x_i)_{i\in I}$ Une famille de parties non vides de E indexée par **I.**

$(f_i)_{i\in I}$ une famille d'application $xi\rightarrow F$ indexée par le même ensemble I et telle :

$\forall(i,j)\in I^2 : i\neq j$ et $\forall x\in X_i\cap X_j \;\; f_i(x)= f_j(x)$

a) $f: \quad \bigcup_{i\in I} x_i \rightarrow F$

$$x \rightarrow \begin{cases} f_i(x) \text{ si } x\in X_i \\ \forall i\in I \end{cases}$$

Est une application de $\bigcup_{i\in I} x_i$ vers F car pour tout element commun à X_i et X_j

pour $(i,j)\in I^2 \;\; : i\neq j \;\; f_i(x)= f_j(x)$

ce qui assure qu'à tout element de l'union $\bigcup_{i\in I} x_i$ on n'associe qu'une seule image

$y\in F$.

b) si $f: \bigcup_{i\in I} x_i \rightarrow F$ est une application et $\forall i\in I$

$f/X_i = f_i$ sa restriction à X_i alors:$\forall(i,j)\in I^2 : i\neq j$ et $\forall x\in X_i\cap X_j \;\; f_i(x)= f_j(x)$

en effet : $(x\in X_i\cap X_j) \Leftrightarrow (x\in X_i$ et $x\in X_j)$

$(x\in X_i) \Leftrightarrow (f_i(x)= f(x))$ (f_i restriction de f à X_i)

$(x\in X_j) \Leftrightarrow (f_j(x)= f(x))$ (f_j restriction de f à X_j)

par transitivité : $f_i(x)= f_j(x)$.

donc $\forall(i,j)\in I^2$, $i\neq j$ et $\forall x\in X_i\cap X_j : f_i(x)= f_j(x)$

➲ commentaire :

si $\forall(i,j)\in I^2$ Et $i\neq j$ on avait $X_i\cap X_j= \phi$, le probleme serait trivialement simple. On n'aurait pas à se soucier de la coincidence des images des elements communs à X_i et X_j puis qu'ils n'existent pas .dans ce cas on dit que f est un recollement disjoint des $F_i : X_i \rightarrow F$

Exercice 2:

Soit E un ensemble non vide et $(A,B) \in (P(E))^2$

On considère l'application f: $P(E) \to P(A) \times P(B)$

$$x \to (x \cap A, x \cap B)$$

quand f est-elle surjective ?

Solution :

Remarquons d'abord que si $(A,B) = (\phi,\phi)$

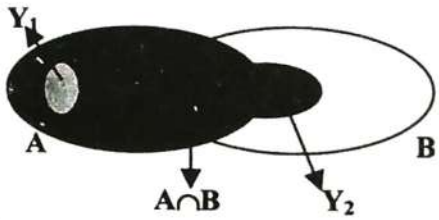
$\forall x \in P(E)$: $x \cap A = \phi$, $x \cap B = \phi$ et par conséquent: $\mathrm{Im} f = (\phi,\phi)$ et f est une application constante non surjective dans ce cas présent, si $(A,B) \neq (\phi,\phi)$

1. $A \cap B = \phi$

Soit $(Y_1,Y_2) \in P(A) \times P(B)$, $Y_1 \cup Y_2 \in P(E)$

Et $f(Y_1 \cup Y_2) = ((Y_1 \cup Y_2) \cap A, (Y_1 \cup Y_2) \cap B) = ([(Y_1 \cap A) \cup (Y_2 \cap A)], [(Y_1 \cap B) \cup (Y_2 \cap B)])$ $f(Y_1 \cup Y_2) = (Y_1 \cup \phi, \phi \cup Y_2) = (Y_1,Y_2)$

donc $\forall (Y_1,Y_2) \in P(A) \times P(B)$: $f(Y_1 \cup Y_2) = (Y_1,Y_2)$ et f est donc surjective.



2. si $A \cap B \neq \phi$ (dans ce cas $A \neq \phi$ et $B \neq \phi$)
considérons $Y_1 \in P(A-B)$ et $Y_2 = Y'_2 \cup Y''_2$
avec $Y'_2 \in P(B-A)$ et $Y''_2 \in P(A \cap B)$.
Le couple (Y_1,Y_2) admet un antécédent dans $P(E)$
s'il existe $x \in P(E)$: $x \cap A = Y_1$ et $x \cap B = Y_2$.
Pour que $x \cap A = Y_1$ avec $y_1 \in P(A-B)$ ait lieu. Il faut avoir $x = Y_1 \cup x'$;$x' \in P(E-A)$
Mais alors : $x \cap B$ serait égal à : $(Y_1 \cup x') \cap B = (Y_1 \cap B) \cup (x' \cap B) = \phi \cup (x' \cap B) = x' \cap B$.
$x' \cap B \subset (B-A)$ donc $(x' \cap B)$ ne contiendrait pas les éléments de $Y''_2 \in P(A \cap B)$ et l'égalité $x \cap B = Y_2$ $(Y_2 = Y'_2 \cup Y''_2)$ serait impossible.
Finalement les couples $(Y_1,Y_2) \in P(A) \times P(B)$ ainsi décrits n'ont pas d'antécédants dans $P(E)$ ce qui assure la non surjectivité de f.

Conclusion: f est surjective si 1) $(A,B) \neq (\phi,\phi)$.
et 2) $A \cap B = \phi$

ce qui peut s'ecrire aussi: $[(A,B) \neq (\phi,\phi)$ et $A \cap B = \phi] \Rightarrow [f$ surjective$]$

➲ **remarque** :

par contraposée, l'implication precédante est Equivalente à :

[f non surjective] $\Rightarrow$ [(A,B)= (ϕ,ϕ) ou $A\cap B\neq\phi$]

➲ **commentaire** :

les couples $(y_1,y_2) \in P(A)\times P(B)$ tels que :

$Y_2\in P(B-A)$ et $Y_1=Y'_1\cup y''_1$ telles que :

$Y'_1\in P(A-B)$ et $Y''_1\in P(A\cap B)$ n'admettent pas d'antecédants dans $P(E)$ car si $x\in P(E)$ vérifie $x \cap B = Y_2$, $x \cap A \subset (A-B)$ et ne contiendrait aucun élément de $(A\cap B)$ et l'egalité $x\cap A = Y_1$,$(Y_1=Y'_1\cup Y'_1)$ serait impossible.

Exercice 3 :

Soient E et F deux ensembles non vides .

1. a) montrer que s'il existe une application : f: E→F injective alors il existe une application g: F →E surjective.

b) g est-elle unique ?

2. a) montrer que s'il existe f : E→F surjective alors il existe g': F→E injective.

b) g' est-elle unique ?

3. a) calculer g0f (f injective)

b) calculer f0g' (f surjective)

Solution:

1.

a) (f: E→F injective) ⇔ (f: E→Imf bijective)

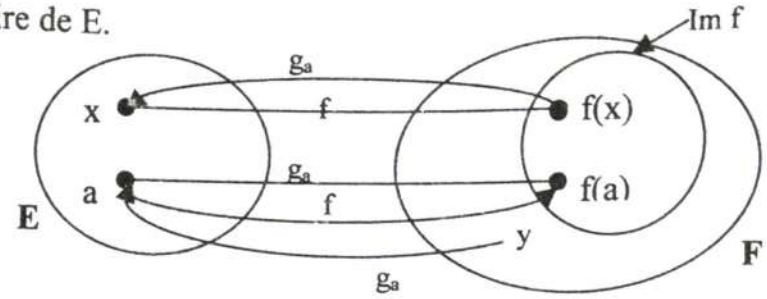
appelons g_1: Im f→ E son application reciproque.

i-e : $\forall x_0\in E\ (f(x_0)=y_0) \Leftrightarrow (g_1(y_0)=x_0)$

considérons à présent l'application g_a: F→E

$$y \rightarrow \begin{cases} g_1(y) & \text{si } y\in \mathrm{Im}\, f \\ a & \text{si } y\in F-\mathrm{Im}\, f \end{cases}$$

a etant un élement arbitraire de E.



cette application est surjective par construction .

on a : $g_a^{-1}\{a\}=\{f(a)\} \cup \{F\text{-Im}f\}$.

La restriction de g_a à F-Imf est constante

$\forall y \in F\text{-Im}f : g_a(y)=a$

a etant arbitrairement choisi dans l'ensemble E, l'application g_a n'est donc pas unique.

2.

a) (f :E→F surjective)⇔($\forall y \in F$ $f^{-1}\{y\} \neq \phi$)

soit alors $x_0 \in f^{-1}(\{y\})$,on a donc $f(x_0)=y$.

considérons l'application g':F→E

$$y \rightarrow x_0$$

soit $(y,y') \in F^2$, $g'(y)=g'(y')$ est équivalente à : $x_0=x'_0$

$g'(y)=x_0, g'(y')=x'_0)$ $(x_0 \in f^{-1}(\{y\})$ $(x'_0 \in f^{-1}(\{y'\})$

$(x_0=x'_0) \Leftrightarrow [f(x_0)=f(x'_0)] \Leftrightarrow (y=y')$

donc $\forall y,y'$; $[g'(y)=g'(y')] \Rightarrow [y=y']$ donc g' injective .

b)comme dans 1-b, x_0 etant arbitrairement choisi parmi l'ensemble des antécédants de y qui peut contenir plus d'un élément , alors g' n'est pas unique.

3. f:E→F injective on a :

a) $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} E$

$E \rightarrow g0f \leftarrow E$

on a : $\forall x \in E$ $(g0\ f)(x) = g[f(x)] = x$ car : $x \in E \Rightarrow f(x) \in \text{Im}\ f$ et

$g[f(x)] = g_1[f(x)] = x$(par définition de g_1)

donc $\forall\ x \in E\ (g0f)(x) = x = Id_E(x)$ ou $gof = Id_E$

b) f:E→F surjective on a : $F \xrightarrow{g'} E \xrightarrow{f} F$

$$F \rightarrow fog' \leftarrow F$$

on a : $\forall y \in F\ (fog')(y) = f[g'(y)] = f(x_0) = y$

x_0 etant l'antecédant choisi de y par f

donc : $[\forall y \in F (fog')(y) = y] \Leftrightarrow [(fog')(y) = Id_F(y)]$ ou $fog' = Id_F$

➲ commentaire :

Les implications réciproques de 1-a et 2-a restent vraies; c'est à dire :

1. [g: F→E surjective] ⇒ [∃ f: E →F injective]

(voir 2-a et adapter les ensembles de départ et d'arrivée)

2. [g: F→E injective] ⇒ [∃f: E →F surjective]

(voir 1-a et adapter les ensembles de départ et d'arrivée)

il y a donc une equivalence logique entre l'existence d'une injection d'un ensemble E vers un autre ensemble F et l'existence d'une surjection de l'ensemble F vers l'ensemble E et vice vers a .

3. l'application g (ou g') est unique dans le cas où :

f: E→F est bijective, elle est l'application réciproque de$f$, $g = f^{-1}$ (ou $g' = f^{-1}$).

Exercice 4:

Soient E, F et G trois ensembles non vides et :

$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ deux applications telles que décrites dans le diagramme .

Montrer :

1. [go$f$ injective]⇒[f injective]

2. [go$f$ surjective] ⇒[g surjective]

Solution :

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$E \rightarrow gof \leftarrow G$$

1. ($go f$ injective) $\Rightarrow$ (f injective)

soit $(x_1,x_2)\in E^2$: $f(x_1) = f(x_2)$

$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (g[f(x_1)]=g[f(x_2)]) \Leftrightarrow ((go f)(x_1) = (go f)(x_2)) \Rightarrow (x_1=x_2)$ ($go f$ injective.)

donc f est injective

2. $go f$ surjective) $\Rightarrow$ (g surjective).

$\forall z\in G\ \exists x\in E : z = (go\ f)(x)$ (car $go\ f$ est surjective)

$z=(go f)(x)=g[f(x)]$

$(x\in E) \Rightarrow (f(x)=y\in F)$ (f: $E\rightarrow F$)

donc ($\forall z\in G\ \exists y\in F : z=g(y)$) donc g surjective.

➲ commentaire:

a) (f injective) $\not\Rightarrow$ ($go f$ injective)

b) (g surjective) $\not\Rightarrow$ ($go f$ surjective).

Considérons $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($f = Id_{\mathbb{R}}$)

$x\rightarrow x$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x\rightarrow x^2$

f est injective (elle est même bijective) mais $(go f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas injective

$x\rightarrow x^2$ $((-1)^2=(1)^2=1$ par exemple)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($g = Id_{\mathbb{R}}$)

$x \rightarrow x^2$ $\quad x \rightarrow x$

$go f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \rightarrow x^2$

g est surjective (elle est même bijective) alors que ($go f$) n'est pas surjective (les nombres réels strictement négatifs n'ont pas d'antécédants dans $\mathbb{R}$).

Exercice 5:

Soient E, F et G trois ensembles et f: $E\rightarrow F$, g: $F\rightarrow G$ et h : $G \rightarrow E$ trois applications. Montrer que si ($hogo f$) et ($go f oh$) sont injectives et que ($f ohog$) est surjective alors f, g, et h sont bijectives.

Solution:

1. montrons que f est bijective:

((hogo$f$) = (hog)of injective) $\Rightarrow$ (f est injective) (exercice 4,1^{ére} question)

(($f$ohog) = fo(hog) surjective) $\Rightarrow$ (f est surjective) (exercice 4, 2^{éme} question)

(f injective et f surjective) $\Leftrightarrow$ (f bijective)

2. montrons que h est bijective

((go$f$oh) = (go$f$)oh injective) $\Rightarrow$ (h est injective) (exercice 4,1^{ére} question)

pour montrer que h est surjective nous avons besoin d'établir le résultat:

$E \xrightarrow{H} F \xrightarrow{F} G$

(F bijective et (Foh) surjective) $\Rightarrow$ (H est surjective) (*)

en effet soit $f \in F$ alors F (f) = g = f[H(e)] car FoH est surjective ($e \in E$)

mais F étant bijective (F(f) = F(H(e))) $\Rightarrow$ (f = H(e))

e est donc un antécédant de f par H , donc H est surjective.

Prouvons à présent que h est surjective .

On a : (($f$ohog) = fo(hog) surjective) $\Rightarrow$ (hog surjective) (f bijective)

(hog surjective) $\Rightarrow$ (h est surjective) (exercice 4 , 2^{éme} question)

(h injective et h surjective)$\Leftrightarrow$ (h bijective).

Montrons que g est bijective:

g est surjective car ($f$ohog=($f$oh)og surjective) $\Rightarrow$ (g est surjective)

car $f$oh bijective (composée de 2 bijections)

pour montrer que g est injective:

établissons d'abord le résultat :(goH injective et H bijective) $\Rightarrow$ (g est injective) (**)

$E \xrightarrow{H} F \xrightarrow{g} G$

Soient $(f_1, f_2) \in F^2$:

$(g(f_2) = g(f_1)) \Leftrightarrow (\exists!(e_1,e_2) \in E^2 : (goH)(e_1) = (goH)(e_2)) \Rightarrow (e_1 = e_2)$d'où g injective.

Montrons à présent que g est injective.

On a : (go$f$oh)=go($f$oh) injective et ($f$oh) bijective, alors g est injective.

Exercice 6:

Soient E, F et G trois ensembles et f: E→F, g: F→G et h: G →E trois applications. Montrer que si (hogo$f$) et (go$f$oh) sont surjectives et que ($f$ohog) est injective alors f,g,h sont bijectives.

Solution :

1. montrons que g est bijective:

((go$f$oh) = go($f$oh) surjective) ⇒ (g est surjective) (exercice 4, question 2)

(($f$ohog) = ($f$oh)og injective) ⇒ (g est injective) (exercice 4 , question 1)

(g injective et g surjective)⇔ (g bijective)

2. montrons que h est bijective

(hogo$f$ = ho(go$f$) surjective) ⇒ (h est surjective) (exercice 4, question 2)

($f$ohog = ($f$oh)og injective et g bijective) ⇒(($f$oh) injective) (résultat (**) exercice 5)

($f$oh injective) ⇒ (h injective) (exercice 4, question 1)

(h injective et h surjective) ⇔ (h bijective)

- montrons finalement que f est bijective.
- (hogo$f$) = (hog)of surjective et (hog) bijective (composée de de 2 bijections) d'où f est surjective (voir résultat (*) exercice 5)
- ($f$ohog = fo(hog) injective et (hog) bijective) ⇒(f est injective) (voir résultat (**) exercice 5)

(f injective et f surjecive) ⇔ (f bijective)

Exercice 7 :

Soient E, F et G trois ensembles et f : E→F, g: F→h et h: G→E trois applications .

Montrer que si (hogo$f$) et ($f$ohog) sont injectives et (go$f$oh) est surjective alors f,g et h sont bijectives.

Solution :

1. montrons que g est bijective:

- [$f$ohog=($f$oh)og injective] $\Rightarrow$ (g injective) (exercice 4, question 1).
- [go$f$oh = go($f$oh) surjective] $\Rightarrow$ (g surjective) (exercice 4, question 2).

  (g injective et g surjective) $\Leftrightarrow$ (g est bijective)

2. montrons que f est bijective

- [hogo$f$ = (hog)of injective] $\Rightarrow$(f injective)
- [go$f$oh=go($f$oh) surjective et g bijective]$\Rightarrow$($f$oh surjective) (résultat * exercice 5)
- ($f$oh surjective) $\Rightarrow$ (f surjective) (exercice 4, question 2).

  (f injective et f surjective)$\Leftrightarrow$ (f est bijective)

3. finalement montrons que h est bijective

[hogo$f$=ho(go$f$) injective et go$f$bijective]$\Rightarrow$(h est injective) (résultat ** exercice 4)

- [go$f$oh=(go$f$)oh surjective et (go$f$) bijective]$\Rightarrow$(h surjective) (résultat* exercice 5)

  (h injective et h surjective) $\Leftrightarrow$ (h est bijective).

Exercice 8:

Soient E, F et G trois ensembles non vides et :

f: E$\rightarrow$F , g: F$\rightarrow$G

f': E$\rightarrow$F, g': F$\rightarrow$G

1. montrer : [f surjective et go$f$ = g'of] $\Rightarrow$ (g = g')
2. montrer :[g injective et go$f$ =gof'] $\Rightarrow$(f = f')

Solution :

1. (f surjective et go$f$ =g'of) $\Rightarrow$ (g=g')

$\forall$y $\in$F $\exists$x$\in$E : y = f(x) car f est surjective

on a : (go$f$)(x) = (g'of)(x) car go$f$ = g'of

soit (g[f(x)] =g'[f(x)]) $\Leftrightarrow$ (g(y)=g'(y))

[$\forall$y $\in$F: g(y) = g'(y)] $\Leftrightarrow$ (g=g')

2. (g injective et $g o f = g o f') \Rightarrow (f = f')$

$[g o f = g o f'] \Leftrightarrow (\forall x \in E: (g o f)(x) = (g o f')(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in E: g[f(x)] = g[f'(x)]) \Rightarrow (f(x) = f'(x))$

car g est injective donc$(\forall x \in E: f(x) = f'(x)) \Leftrightarrow (f = f')$

➲ **remarque:**

1. il est évident que $(g = g') \Rightarrow (g o f = g' o f)$ et que: $(f = f') \Rightarrow (g o f = g o f')$
2. cet exercice montre que les surjections sont simplifiables à droite et les injections sont simplifiables à gauche.

Exercice 9:

Soit E un ensemble non vide.

Montrer l'existence d'une bijection entre l'ensemble des relations d'équivalence définies sur E et l'ensemble des partitions de E.

Solution :

Appelons req(E) l'ensemble des relations d'équivalence définies sur E et part (E) l'ensemble des partitions de E .

Req(E) $\neq \phi$ et part(E) $\neq \phi$ car l'égalité entre les éléments de E définit une relation d'équivalence sur E et $\{\{x\}\ x \in E\}$ une partition de E

ceci étant précisé, mettre req(E) et part(E) en bijection c'est:

- associer à toute relation de req(E) une partition unique de part(E).
- associer à toute partition de part(E) une relation d'équivalence unique de req(E).

1. soit $R \in req(E)$:

$\forall x \in E$: $cl(x) = \{y \in E : x\ R\ y\}$ est la classe d'équivalence de x.

- $cl(x) \neq \phi$, $(x\ R\ x) \Leftrightarrow (x \in cl(x))$
- $(x_1\ R\ x_2) \Leftrightarrow (cl(x_1) \cap cl(x_2) = \phi)$

$$\bigcup_{x \in E} cl(x) = E$$

donc $\{(cl(x)) : x \in E\}$ est une partition de E .

associons à $R \in req(E)$ $\{ cl(x)\ x \in E \} \in part(E)$

montrons que $\{ cl(x)\ x \in E \}$ est unique .

$\{ cl(x)\ x \in E \}$ est unique car s'il existait deux partitions du type :

$\{ cl_1(x)\ x \in E \}$ et $\{ cl_2(x)\ x \in E \}$

on aurait : $\forall\ x \in E : (a \in cl_1(x)) \Leftrightarrow (a\ R\ x) \Leftrightarrow (a \in cl_2(x))$

et $(a \in cl_2(x)) \Leftrightarrow (a\ R\ x) \Leftrightarrow (a \in cl_1(x))$

donc $cl_1(x) = cl_2(x)$

tout element de E ne possède qu'une seule classe d'équivalence suivant la relation R .

2. réciproquement: soit $\{ (A_i)_{i \in I} \}$ une partition de E .

la relation R' définie sur E par :

$(\forall (x,y) \in E^2 , x\ R'y) \Leftrightarrow (\exists i_0 \in I : (x,y) \in (A_{i_0})^2)$

Est manifestement une relation d'équivalence.

Elle est refléxive : $\forall x \in E, \exists i_0 \in I : x \in A_{i_0}$ car $E = \cup A_i$ donc $(x,x) \in (A_{i_0})^2$

- elle est symétrique car $((x,y) \in (A_{i_0})^2) \Leftrightarrow ((x,y) \in (A_{i_0})^2)$
- elle est transitive car

  $[(x,y) \in (A_{i_0})^2$ et $(y,z) \in (A_{i_1})^2] \Leftrightarrow [x \in A_{i_0}, y \in A_{i_0}, y \in A_{i_1}$ et $z \in A_i]$

  or $A_{i_1} \cap A_{i_0} = \phi$ ($\{(A_i)_{i \in I}\}$ partition de E)

  donc $(y \in A_{i_1} \cap A_{i_0}) \Rightarrow A_{i_1} = A_{i_0}$

finalement $(x \in A_{i_0}, y \in A_{i_0}$ et $z \in A_{i_0})$

$$\left.\begin{array}{c} \text{donc } (x,y) \in (A_{i_0})^2 \\ \text{et} \\ (y,z) \in (A_{i_1})^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,z) \in (A_{i_0})^2$$

soit $(x\ R'y$ et $y\ R'z) \Rightarrow (x\ R'z)$

d'ou R' transitive.

associons à la partition $\{(A_i)_{i \in I}\}$ de part(E) la relation R' de req(E) sus définie.

Cette relation R' est telle que $\forall i \in I$: A_i est une classe d'équivalence car:

$\forall x \in E : \exists i \in I : x \in A_i$ $(E = \bigcup_{i \in I} A_i)$, elle est donc nécessairement unique.

➲ **conclusion :**

Nous venons par ce procédé de mettre req(E) et part(E) en bijection .

Exercice 10:

Soient E un ensemble non vide et A une partie de E .

On appelle fonction caracteristique (ou indicatrice) de A l'application

$$\varphi_A : E \to \{0,1\}$$

$$x \to \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \in E-A \end{cases}$$

soit B une autre partie de E établir les égalités :

1. a. $\varphi_{E-A} = 1 - \varphi_A$

b. $\varphi_{A \cap B} = \varphi_A \times \varphi_B$

c. $\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_{A \cap B}$

2. établir l'égalité : $\varphi_{A\Delta B} = (\varphi_A - \varphi_B)^2$, "Δ" étant le symbole de la difference symétrique.

3. considérons ζ (E) l'ensemble des applications de E dans {0,1}.

a. montrer que : $\forall f \in \zeta(E)\ \exists A \in P(E) : \varphi_A = f$.

b. Soit $\phi : P(E) \to \zeta(E)$

$$A \to \varphi_A$$

Montrer que ϕ est bijective.

Solution :

Rappelons que si : $f: E \to R$; $g: E \to R$

Sont deux applications alors:

$(f+g) : E \to R$; $x \to f(x)+g(x)$ $\qquad$ $(f-g) : E \to R$; $x \to f(x)-g(x)$ $\qquad$ $(f \times g) : E \to R$; $x \to f(x) \times g(x)$

et que $(f=g) \Leftrightarrow (\forall x \in E\ ;\ f(x)=g(x))$

ceci étant rappelé :

1.

a. $\varphi_{E-A}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in E - A \\ 0 \text{ si } x \in A \end{cases}$ $\quad \varphi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \in E-A \end{cases}$

on a : $1=1-0 \quad (x \in E-A)$

$0=1-1 \quad (x \in A)$

donc $[\forall x \in E : \varphi_{E-A}(x) = 1-\varphi_A(x)] \Leftrightarrow \varphi_{E-A}=1-\varphi_A$

b. $\varphi_{A \cap B}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \cap B \\ 0 \text{ si } x \notin A \cap B \end{cases}$

- $x \in A \cap B$: $\varphi_A(x)=1$, $\varphi_B(x)=1$; $(\varphi_A \times \varphi_B)(x)=1 \times 1=1$ et $(\varphi_A \times \varphi_B)(x)= \varphi_{A \cap B}(x)$
- $x \notin A \cap B$: $\varphi_A(x) \times \varphi_B(x) =(\varphi_A \times \varphi_B)(x)=0$ car $x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ ou $x \notin B$

  et $\varphi_{A \cap B}(x) =0$

donc $\varphi_{A \cap B}(x) = (\varphi_A \times \varphi_B)(x)$.

finalement :$[\forall x \in E: \varphi_{A \cap B}(x)= (\varphi_A \times \varphi_B)(x)]$

d'où : $\varphi_{A \cap B}=\varphi_A \times \varphi_B$

c. $\varphi_{A \cup B}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \cup B \\ 0 \text{ si } x \notin A \cup B \end{cases}$

1) si $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$

- si $x \in A$ et $x \notin B$: $\begin{cases} \varphi_A(x)=1 \text{ et } \varphi_B(x)=0 \\ \varphi_{A \cap B}(x) =0 , \end{cases}$

  et $(\varphi_A \times \varphi_B - \varphi_{A \cap B})(x)=1=\varphi_{A \cup B}(x)$
- si $x \in B$ et $x \notin A$: $\begin{cases} \varphi_A(x)=0 \text{ et } \varphi_B(x)=1 \\ \varphi_{A \cap B}(x)= 0 \end{cases}$

  et $(\varphi_A \times \varphi_B - \varphi_{A \cap B})(x)=1=\varphi_{A \cup B}(x)$.

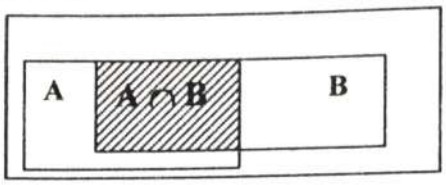
- si $x \in A \cap B$: $\varphi_A(x)=\varphi_B(x)=1=\varphi_{A\cap B}(x)$ et $(\varphi_A+\varphi_B-\varphi_{A\cap B})(x)=1=\varphi_{A\cup B}(x)$.

2) $(x\notin A\cup B) \Leftrightarrow (x\notin A$ et $x\notin B)$

$\varphi_A(x)=\varphi_B(x)=\varphi_{A\cap B}(x)=0$ et $(\varphi_A+\varphi_B-\varphi_{A\cap B})(x)=0=\varphi_{A\cup B}(x)$.

donc $[\ \forall x\in E : (\varphi_A+\varphi_B-\varphi_{A\cap B})(x)=\varphi_{A\cup B}(x)]$

d'où: $\varphi_A+\varphi_B-\varphi_{A\cap B}=\varphi_{A\cup B}$



$A\Delta B$ est la partie non hachurée **E**

2. $\varphi_{A\Delta B}(x)=\begin{cases}1 \text{ si } x\in A\Delta B\\ 0 \text{ si } x\notin A\Delta B\end{cases}$

$(x\in A\Delta B) \Leftrightarrow (x\in(A-B)\cup(B-A))$

- $x\in(A-B)$: $\varphi_A(x)=1$, $\varphi_B(x)=0$, $\varphi_{A\Delta B}(x)=1$

$(\varphi_A-\varphi_B)^2(x)=(1-0)^2=1^2=1$

$[(\varphi_A-\varphi_B)(x)]^2=\varphi_{A\Delta B}(x)$

- $x\in(B-A)$: $\varphi_B(x)=1$, $\varphi_A(x)=0$ $\quad\varphi_{A\Delta B}(x)=1$

$[(\varphi_A-\varphi_B)(x)]^2=(-1)^2=1=\varphi_{A\Delta B}(x)$

$(x\notin A\Delta B)\Leftrightarrow [x\in(A\cap B)$ ou $(x\notin A$ et $x\notin B)]$

si $x\in A\cap B$: $\varphi_A(x)=\varphi_B(x)=1$

$[(\varphi_A-\varphi_B)(x)]^2=0^2=0=\varphi_{A\Delta B}(x)$

si $(x\notin A$ et $x\notin B)$: $\varphi_A(x)=\varphi_B(x)=0$ et $[(\varphi_A-\varphi_B)(x)]^2=(0-0)^2=0^2=0=\varphi_{A\Delta B}(x)$

finalement : $[\forall x\in E\ ,\ \varphi_{A\Delta B}(x)=[(\varphi_A-\varphi_B)(x)]^2] \Leftrightarrow (\varphi_{A\Delta B}(x)=(\varphi_A-\varphi_B)^2)$

3.

a. soit f: $E\to\{0,1\}$

considérons $A=f^{-1}(\{1\})=\{x\in E: f(x)=1\}$

$\varphi_A : E\to\{0,1\}$

$$x\to\begin{cases}0 \text{ si } x\notin A\\ 1 \text{ si } x\in A\end{cases}$$

$\varphi_A = f$ car :

si $x \in A$: $\varphi_A(x)=1$ et $f(x)=1$ ($A= f^{-1}\{1\}$)

si $x \notin A$: $\varphi_A(x)=0$ et $f(x)=0$ ($f(x)\neq 1$)

donc ($\forall x \in E$, $\varphi_A(x)= f(x)$) $\Leftrightarrow$ ($f=\varphi_A$)

b. ϕ : $P(E) \rightarrow \zeta(E)$

$A \rightarrow \varphi_A$

ϕ est surjective par construction . ($\phi(A)= \varphi_A$)

montrons que ϕ est injective.

$(\phi(A_1)= \phi(A_2)) \Leftrightarrow (\varphi_{A_1}=\varphi_{A_2}) \Leftrightarrow (\forall x \in E: \varphi_{A_1}(x)= \varphi_{A_2}(x))$

si $x \in A_1$: $(\varphi_{A_1}(x)=1= \varphi_{A_2}(x)) \Leftrightarrow (x \in A_2$ donc $A_1 \subset A_2)$

$(x \in A_2) \Leftrightarrow (\varphi_{A2}(x)=1=\varphi_{A_1}(x)) \Leftrightarrow (x \in A_1$ donc $A_2 \subset A_1)$

finalement $A_1 = A_2$ soit : $(\phi(A_1)= \phi(A_2)) \Rightarrow (A_1= A_2)$ et ϕ est injective.

ϕ est donc bijective (car injective et surjective).

➲ remarque:

la bijection ϕ de la 3 éme question de cet exercice a permis d'établir l'équipotence entre $P(A)$ et $\{0,1\}^A$ ensemble des applications de A vers $\{0,1\}$.

➲ commentaire :

les fonctions caractéristiques (ou indicatrices) de parties d'un ensemble non vide jouent un rôle prépondérant dans la théorie de la mesure et de l'intégration et en calcul de probabilités .

Exercice 11:

Soient A, B et C trois ensembles non vides et :

F: $A \rightarrow C$ et G: $A \rightarrow B$ deux applications

On appelle noyau de F et on note KerF, l'ensemble des couples $(\alpha,\beta) \in A^2$: $F(\alpha)=F(\beta)$.

De même que le noyau de G est l'ensemble des couples $(\alpha,\beta) \in A^2$: $G(\alpha)=G(\beta)$

On appelle fibre de F en $y \in C$ l'ensemble $F^{-1}\{y\}=Fy$ l'ensemble des antécédants de y : $x \in Fy \Leftrightarrow F(x)=y)$

1. etablir l'équivalence : $(KerF \subset KerG) \Leftrightarrow (\forall y \in ImF : G|Fy$ est constante)
2. **a.** montrer que $(KerF \subset KerG) \Leftrightarrow (\exists H : C \to B : G = H.F)$

   b. H est – elle unique ?
3. **a.** montrer que si F est injective , il existe $H : C \to B : G = H.F$

   b. montrer que si F est surjective et $KerF \subset KerG$

   alors $\exists H : C \to B : G = H.F$ et que H est unique
4. determiner $H : C \to B$ vérifiant $G = H.F$ dans le cas où F est bijective.

Solution :

1. $(KerF \subset KerG) \Leftrightarrow (\forall y \in ImF : G/Fy$ est constante).

- $(KerF \subset KerG) \Rightarrow (\forall y \in ImF : G/Fy$ est constante).

Soit $y \in ImF$: $(\forall (\alpha,\beta) \in Fy : \alpha \neq \beta\ (F(\alpha)=F(\beta)=y)) \Rightarrow (G(\alpha)=G(\beta))$. Car $KerF \subset KerG$.

Donc $\forall (\alpha,\beta) \in Fy : \alpha \neq \beta : G(\alpha)=G(\beta)$. G/Fy est donc constante .

- Réciproquement : (si $\forall y \in ImF : G/Fy$ est constante) alors $KerF \subset KerG$.

Soit $(\alpha,\beta) \in KerF$ alors $F(\alpha)=F(\beta)$

$(F(\alpha)=F(\beta)) \Leftrightarrow (\exists y \in ImF : (\alpha,\beta) \in (Fy)^2 \quad (F(\alpha)=F(\beta)=y))$

Comme la restriction G/Fy est constante on a alors: $(G(\alpha)=G(\beta)) \Leftrightarrow ((\alpha,\beta) \in KerG)$

$(\forall (\alpha,\beta) \in KerF) \Rightarrow ((\alpha,\beta) \in KerG)$ et $KerF \subset KerG$

finalement: $(KerF \subset KerG) \Leftrightarrow (\forall y \in ImF\ G/Fy$ est constante)

2.

a. $(KerF \subset KerG) \Leftrightarrow (\exists H : C \to B : G = H.F)$

- $(KerF \subset KerG) \Rightarrow (\exists H : C \to B : G = H.F)$

$(\mathrm{Ker}F \subset \mathrm{Ker}G) \Leftrightarrow (\forall\, y \in \mathrm{Im}F\ G/Fy$ est constante$) \Leftrightarrow (\exists z \in B: \forall x \in Fy, G(x) = z)$

Considérons $H: C \to B$

$$y \to \begin{cases} G(x) \text{ si } y \in \mathrm{Im}F \\ b\ (b \in B)\ \ b \text{ étant un élement arbitraire de B si } y \notin \mathrm{Im}F \end{cases}$$

on a: $\forall\, x \in A$, $(H.F)(x) = H.[F(x)] = G(x)$ car $x \in A \Rightarrow F(x) \in \mathrm{Im}F$

donc $(\forall\, x \in A (H.F)(x) = G(x)) \Leftrightarrow G = H.F$.

- si il existe $H: C \to B$ telle que $G = H.F$ montrons alors que $\mathrm{Ker}F \subset \mathrm{Ker}G$

Soit $(\alpha,\beta) \in \mathrm{Ker}F$ on a alors $F(\alpha)=F(\beta)$

$(F(\alpha)=F(\beta)) \Rightarrow (H.[F(\alpha)] = H.[F(\beta)]) \Leftrightarrow ((H.F)(\alpha)=(H.F)(\beta)) \Leftrightarrow (G(\alpha) = G(\beta))$

$(G(\alpha) = G(\beta)) \Leftrightarrow ((\alpha,\beta) \in \mathrm{Ker}G)$

donc $\mathrm{Ker}F \subset \mathrm{Ker}G$ et

finalement $(\mathrm{Ker}F \subset \mathrm{Ker}G) \Leftrightarrow (\exists H: C \to B: G = H.F)$

b. H n'est pas unique car B comporte en général plus d'un élément susceptibles d'être l'image de tous les éléments de (C-ImF).

$\forall y \in C\text{-}\mathrm{Im}F : H(y)=b$ (b element arbitraire de B)

3.

a. $(F: A \to C$ injective$) \Leftrightarrow (F: A \to \mathrm{Im}F$ bijective$)$

$(\forall y \in C\text{-}\mathrm{Im}F\ \exists!\ x \in A : f(x)=y) \Leftrightarrow (\forall y \in C\text{-}\mathrm{Im}F\ Fy = \{x\})$ (card $Fy=1$)

donc G/Fy est constante $= G|\{x\}$

$(\forall y \in \mathrm{Im}F\ G/Fy$ constante$) \Leftrightarrow (\mathrm{Ker}F \subset \mathrm{ker}G) \Leftrightarrow (\exists\, H: C \to B: G=H.F$ (voir 1 et 2))

b. $(F: A \to C$ surjective$) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}F=C, \forall y \in C\ \exists x \in A : F(x)=y)$

$(\mathrm{Ker}F \subset \mathrm{ker}G) \Leftrightarrow (\forall y \in C\ G/Fy$ constante $) \Leftrightarrow (\exists\, H: C \to B: G = H.F)$

H est à présent unique car $C\text{-}\mathrm{Im}F=\phi$

$\forall y \in C : H(y) = G(x)\ \ (x \in Fy)$

4. dans le cas où F est bijective $\exists\, F^{-1}: C \to A$ bijective : $(\forall x \in A : F(x)=y) \Leftrightarrow (x = F^{-1}(y))$.

l'équation : $G=H.F$ est équivalente à :

$H = G.F^{-1}$ $\qquad ([G = H.F] \Leftrightarrow [H = G.F^{-1}])$.

CHAPITRE A SECTION 2

(5 Exercices, 12 Questions)

- Involutions.
- Transformations d'un ensemble E.
- Puissances entières d'une transformation .
- Puissances entières d'une involution.

Exercice 1:

Soit A un ensemble non vide . On appelle symétrie de A^2 l'application:

$$S : \quad A^2 \to A^2 \quad .$$
$$(x,y) \to (y,x).$$

1. Montrer que S est Involutive.

2. Déterminer les parties fixes F de A^2

3. Montrer que toute partie stable P de A^2 est invariante.

Solution:

1. $S : \quad A^2 \to A^2$

$(x,y) \to (y,x)$.

On a : $\forall (x,y) \in A^2$ $(SOS)(x,y) = S[S(x,y)] = S(y,x) = (x,y) = IdA^2(x,y)$

Donc $[\forall (x,y) \in A^2 \quad SOS(x,y)) = (x,y)] \Leftrightarrow [SOS = Id\, A^2] \Leftrightarrow$ (S Involutive).

(S Involutive) $\Leftrightarrow (S(x,y) = (y,x)) \Leftrightarrow (S(y,x) = (x,y))$. $(S=S^{-1})$.

2. (F partie fixe de A^2)$\Leftrightarrow (\forall (x,y) \in F$ (x,y) fixe)

((x,y) fixe) $\Leftrightarrow (S(x,y) = (x,y)) \Leftrightarrow ((y,x) = (x,y)) \Leftrightarrow (x=y)$

Donc $(\forall (x,y) \in A^2 : (x,y)$ fixe$) \Leftrightarrow (x = y)$

Par conséquent : Les parties fixes F de A^2 par S sont les parties de A^2 constituées de couples (x,y) : x = y

(F fixe) $\Leftrightarrow (F \in P(D_{A^2}))$ où D_{A^2} représente la diagonale de A^2

3. Soit P une partie stable de A^2 par S.

Montrer que P est invariante par S revient à prouver que S(p) = P

Comme par hypothèse P est stable par S .

On a déjà $S(p) \subset P$ .....(1) .

Il suffit donc d'établir : $P \subset S(P)$ (2)

Soit alors $(x,y) \in P$, montrons que (x,y) est l'image par S d'un élément de P.

On a : $\forall (x,y) \in P$ $(x,y) = S(y,x)$. (Voir 1.).

Comme $(y,x) = S(x,y)$ (par définition de S), alors $(x,y) = S[\ S(x,y)]$

Avec : $S(x,y) \in S(p)$ car $(x,y) \in P$, Mais $S(p) \subset P$ (P stable par s)

Donc $S(x,y) \in P$ et (x,y) est donc l'image de $S(x,y)$ de P par S.

$(x,y) \in S(p)$ et $P \subset S(p)$ (2) .

((1) et (2)) $\Leftrightarrow$ $(P = S(p))$

➲ remarque:

Par S, les parties stables de A^2 se confondent avec les parties invariantes de A^2 (car toute partie invariante est stable) .

➲ commentaire:

Pour toute involution I d'un ensemble non vide E les parties stables de E se confondent avec les parties invariantes de E .

En effet : soit P une partie stable par I $(I(p) \subset P)$ et montrons que $P \subset I(P)$.

Soit $x \in p$ et $y = I(x)$. On a : $y \in I(p)$. $(I(x) = y) \Leftrightarrow (I(y) = x)$ (I involutive). $(x \in P) \Leftrightarrow (I(y) \in P)$.

comme $y = I(x)$ alors $x = I[\ I(x)]$. $(x \in p) \Rightarrow (I(x) \in I(p) \subset P)$ (p stable par I) .

Donc $(x \in P) \Rightarrow (I(x) \in P)$. x est donc l'image par I de $I(x) \in P$, donc $x \in I(p)$ et : $P \subset I(p)$

Finalement : (P stable) $\Leftrightarrow$ (P Invariante) $(I(p) \subset P)$.

c'est le privilège des involutions sur les autres transformations.

Exercice 2 :

Soit $\alpha \in C^* = C - \{ 0 \}$.

Considérons L'application : $P_\alpha : C \to C$

$$x \to \alpha.x$$

1. montrer h_α est bijective.

2. définir h_α^n pour $n \in N$

3. à quelle condition sur α , $h_\alpha^n = Id_c$ (pour $n \in N^*$)

Solution :

soit $y_o \in C$: l'équation $h_\alpha(x) = y_o$

Où $x \in C$ Admet comme seule solution $x = (1/\alpha).y_o$($\alpha.\ x = y_o \Leftrightarrow x = (1/\alpha).y_o$) .

ce qui assure la bijection de h_α .

2. $h_\alpha^0 = Id_C$

$h_\alpha^1 = h_\alpha$.

$h_\alpha^n : C \to C$

$x \to \alpha^n.x$

Montrons cela par récurrence sur $n \in N$

- $h_\alpha^0 : C \to C$

  $x \to \alpha^0 . x$

$h_\alpha^0 = Id_C$ car $\alpha^0.x = x$.

- Supposons que $\forall n \in N$: $h_\alpha^n : C \to C$

  $x \to \alpha^n.x$

et montrons que $h_\alpha^{n+1} : C \to C$

$x \to \alpha^{n+1} . x$

On a : $h_\alpha^{n+1} = h_\alpha^n \cdot h_\alpha$

Donc $\forall x \in C$ $h_\alpha^{n+1}(x) = (h_\alpha \cdot h_\alpha^n)(x) = h_\alpha[h_\alpha^n(x)] = \alpha.(\alpha^n.\ x)$.

$h_\alpha[h_\alpha^n(x)] = \alpha.(\alpha^n.\ x) = \alpha^{n+1}.x = h_\alpha^{n+1}(x)$

ce qui achève de prouver que : $\forall n \in N, \forall x \in C, h_\alpha^n(x) = \alpha^n.x$

3. $(h_\alpha^n = Id_C) \Leftrightarrow (\forall x \in C : h_\alpha^n(x) = x) \Leftrightarrow (\alpha^n.x = x)$

$[\forall x \in C : \alpha^n.x = x] \Leftrightarrow [\forall x \in C : x(\alpha^n - 1) = 0] \Leftrightarrow (\alpha^n - 1 = 0) \Leftrightarrow (\alpha^n = 1)$

Pour $n = 1$: on a $\alpha = 1$ $h_1 : C \to C$

$x \to x$

$h_1 = Id_C$

Pour $n \geq 2$ $\alpha^n = 1 \Leftrightarrow \alpha = e^{i2k\pi/n}$; $k \in \{0,1,2,\ldots\ldots,(n-1)\}$

➲ **remarque :**

1) pour $n = 2$: $\alpha^2 = 1 \Leftrightarrow \alpha \in \{-1, 1\}$.

$h_{-1} : C \to C$ $\qquad$ $h_1 : C \to C$ $(h_1 = Id_C)$

$x \to -x$ $\qquad$ $x \to x$

h_{-1} et h_1 sont des involutions.

2) les applications h_α sont appelées Homothéties de rapport α .

Exercice 3:

Soit E un ensemble non vide .

Etudier les puissances entières d'une involution I de E .

Solution:

(I involution de E) $\Leftrightarrow [\, I^2 = Id_E] \Leftrightarrow (I = I^{-1})$

$(I = I^{-1}) \Rightarrow (I^2 = (I^{-1})^2 = I^{-2} = Id_E)$

On a : $Z = N \cup Z^-$

- Soit $n \in N$: $n = 2k+1$ ou $n = 2k$, $(k \in N)$

Si $n = 2k+1$: $I^n = I^{2k+1} = I^{2k} . I = (I^2)^k .I = (IdE)^k . I = IdE.I = I$.

Si $n = 2k$: $I^n = I^{2k} = (I^2)^k = (I\, dE)^k = IdE$.

Finalement : $\left.\begin{array}{c} I^{2k+1} = I \\ \text{et} \\ I^{2k} = IdE \end{array}\right\}$ $k \in N$ (I)

- Soit à présent $n \in Z^-$: $n \in Z^- \Leftrightarrow \exists\, p \in N : n = -1.p$.

$I^n = I^{-1-p} = (I^{-1})^p$, $p \in N$.

Si $p = 2k+1$ $(k \in N)$, alors $n = -1.p = -2k-1 = -2(k+1)+1 = 2(-(k+1))+1 = 2k'+1$, $k' \in Z^-$

$I^n = (I^{-1})^p = (I^{-1})^{2k+1} = (I^{-1})^{2k} . I^{-1}$ ($IdE)^k . I^{-1} = Id_E . I^{-1} = I^{-1} = I$

Si $P = 2k$ $(k \in N)$: alors : $n = -2k = 2(-k) = 2k'$ $(k' \in Z^-)$

Et $I^n = (I^{-1})^p = (I^{-1})^{2k} = ((I^{-1})^2)^k = (I^{-2})^k = (IdE)^k = IdE$.

Donc : si $n = 2k'+1$ $(k' \in Z^-)$: $I^n = I$ $\Big]$ (II)

si $n = 2k'$ $(k' \in Z^-)$: $I^n = Id_E$

En définitive : (I) et (II) donnent : $\left.\begin{array}{l} I^{2k} = Id_E . \\ I^{2k+1} = I. \end{array}\right\}$ $\forall\, k \in Z$

Exercice 4 :

soit E un ensemble non vide et T une transformation de E établir pour $n \in N^*$ ($N-\{0\}$).

1. (T^n Injective) $\Rightarrow$ (T Injective) .
2. (T^n surjective) $\Rightarrow$ (T surjective) .
3. (T^n bijective) $\Rightarrow$ (T bijective) .

Solution :

1. soit x_1 , $x_2 \in E$: $T(x_1) = T(x_2)$.

$(T(x_1) = T(x_2)) \Rightarrow (T^n(x_1) = T^n(x_2))$ (car $T^n = T^{n-1}.T$) .

$(T^n(x_1) = T^n(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$car T^n Injective .

Finalement : $[(T(x_1) = T(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)] \Leftrightarrow$ (T injective)

2. Il sagit de montrer que $\forall y \in E \quad \exists x' \in E: y = T(x')$.

Soit $y \in E$: $\exists x \in E$: $y = T^n(x)$ (car T^n est surjective)

Or: $T^n(x) = (T.T^{n-1})(x) = T[T^{n-1}(x)]$

Posons : $T^{n-1}(x) = x' \in E$.

Donc $y = T(x')$, $x' \in E$.

$(\forall y \in E : \exists x' \in E : y = T(x')) \Leftrightarrow$ (T surjective) .

3. (T^n bijective) $\Rightarrow$ (T^n Injective et T^n surjective) d'où le résultat d'après 1. et 2.

Exercice 5 :

Soit E un ensemble comprenant au moins deux éléments distincts a et b .

On considère l'application : $I_{a,b}$: $E \rightarrow E$ définie par :

$I_{a,b}(a) = b$: $I_{a,b}(b) = a$, $\forall x \in E-\{a,b\}$: $I_{a,b}(x) = x$

1. Montrer que $I_{a,b}$ et involutive .

2. Déterminer les parties fixes et les parties de E invariantes par $I_{a,b}$

Solution :

1. On a : $I^2_{a,b} = I_{a,b} \cdot I_{a,b}$.

On a donc : $I^2_{a,b}(a) = (I_{a,b} \cdot I_{a,b})(a) = I_{a,b}[I_{a,b}(a)] = I_{a,b}(b) = a$

Donc $I^2_{a,b}(a) = a$

$I^2_{a,b}(b) = (I_{a,b} \cdot I_{a,b})(b) = I_{a,b}[I_{a,b}(b)] = I_{a,b}(a) = b$

Donc $I^2_{a,b}(b) = b$

$\forall x \in E-\{a,b\}: I^2_{a,b}(x) = I_{a,b} \cdot I_{a,b}(x) = I_{a,b}(I_{a,b}(x)) = I_{a,b}(x) = x$

Donc $\forall x \in E/\{a,b\}: I^2_{a,b}(x) = x$

et finalement : $(I^2_{a,b} = Id_E) \Leftrightarrow (I_{a,b}$ Involutive) .

2. Par définition de $I_{a,b}$: $\forall x \in E/\{a,b\} : (I_{a,b})(x) = x$

donc Les parties fixes de E par $I_{a,b}$ appartiennent à $\mathbb{P}(E-\{a,b\})$.

$I_{a,b}(a) = b \neq a$; $I_{a,b}(b) = a \neq b$.

a est b ne sont donc pas fixes par $I_{a,b}$.

Par conséquent : toute partie F de $E-\{a,b\}$ est fixe par $I_{a,b}$.

$(F \in P(E-\{a,b\})) \Leftrightarrow (F$ fixe par $I_{a,b})$.

- (F fixe) $\Rightarrow$ (F invariante)

$(I_{a,b})(F) = F$.

- Soit F' une partie de E contenant $\{a,b\}$.

$(\{a,b\} \subset F')$.

$(I_{a,b})(F') = I_{a,b}\{a,b\} \cup (I_{a,b})(F' = \{a,b\})$

$\{a,b\} \cup (F' \{a,b\}) = F'$, car tout point de $F'-\{a,b\}$ est fixe par $I_{a,b}$.

Donc si $\{a,b\} \subset F'$ alors : $(I_{a,b})(F') = F'$.

- Si F' est une partie de E : $(a \notin F'$ et $b \in F')$ ou $(b \notin F'$ et $a \in F')$
- On a : $I_{a,b}(a) = b \notin F'$ ou $I_{a,b}(b) = a \notin F'$

Donc $I_{a,b}(F') \not\subset F'$.

(F' n'est pas stable par $I_{a,b}$) .

F' est non invariante par $I_{a,b}$.

$I_{a,b}(\phi) = \phi$

➲ **conclusion :**

L'ensemble des parties de E invariantes par $I_{a,b}$ est constitué par :

1. Les parties F de E ne contenant ni a, ni b

($a \notin F$, $b \notin F$) : ce sont les parties fixes de E par $I_{a,b}$.

2. Les parties F' de E les contenant tous les deux à la fois ($a \in F'$, $b \in F'$).

➲ **remarque :**Seules les parties de E contenant l'un des deux éléments a ou b sans l'autre ne sont pas Invariantes .

Exemples : $\{a\},\{b\}$; ou $x \cup \{a\}$; $x \cup \{b\}$ avec $x \in P(E-\{a,b\})$.

CHAPITRE A SECTION 3

(5 Exercices, 18 Questions)

Transformations d'un ensemble fini.
Permutations – transpositions – cycles.

Exercice 1:

soit $E = \{a_1,a_2,\ldots\ldots\ldots a_n\}$ un ensemble fini et T une transformation de E ($n \in N^*$)
montrons que : (T injective) $\Leftrightarrow$ (T surjective).

Solution :

$T : \{a_1,a_2,\ldots\ldots\ldots a_n\} \rightarrow \{a_1,a_2,\ldots\ldots\ldots a_n\}$

1. montrons que : (T injective) $\Rightarrow$ (T surjective)

procédons par contraposée i.e

a. montrons que : (T non surjective) $\Rightarrow$ (T non injective)

en effet : (T non surjective) $\Leftrightarrow (\exists i \in [1,n] : \forall x \in E : T(x) \neq a_i)$

il y aurait donc au plus (n-1) images par T pour les n éléments de E

(a_i n'étant image d'aucun élément de E) ce qui équivaut à l'existence d'au moins 2 éléments de E qui ont la même image par T donc : T non injective

b. montrons à présent que : (T surjective) $\Rightarrow$ (T injective)

procédons comme dans a. prouvons : (T non injective) $\Rightarrow$ (T non surjective)

en effet : (T non injective) $\Leftrightarrow (\exists (i,j) \in [1,n]^2 : i \neq j$ et $T(a_i)=T(a_j)$

on aurait donc au plus (n-1) images par T pour les n éléments de E .ce qui équivaut à l'existence d'au moins un élément y de E

$\forall x \in E : T(x) \neq y$.

cet élément n'aurait pas d'antécédent dans E il n'est donc image d'aucun élément de E et T est non surjective ($T(E) \subset E$)

les exercices 2 à 5 ont pour objet l'étude des permutations d'un ensemble E fini à n éléments et leur décomposition en cycles dont la somme des ordres vaut n

exercice 2 :

soit $E = \{a_1,a_2,\ldots\ldots a_p, a_{p+1}, a_{p+2},\ldots a_n\}$, $0 < p \leq n$ ($n \in N^*$)

soit $f : E \rightarrow E$ définie par :

$\forall i \in [p+1,n] : f(a_i) = a_i$.

$\forall i \in [1,p-1] : f(a_i) = a_{i+1}$.

et $f(a_p)=a_1$

1. montrer que $f \in$ perm(E) (ensemble des permutation de E)

2. montrer que $f^{p} = Id_E$

3. pour $n \in Z$ définir l'application f^{n}

Solution

1. il s'agit de prouver que f est bijective. Pour cela , il suffit de prouver que f est surjective (voir exercice 1)

soit alors $a_i \in E$.

si $i \in [p+1,n]$: $a_i = f(a_i)$

si $i = 1$, $a_1 = f(a_p)$

si $i \in [2,p]$: $a_i = f(a_{i-1})$

ceci achève de prouver que tout élément de E est l'image d'un élément de E (ici il est unique).

2. $f^{p} = Id_E$

a. $\forall i \in [p+1,n]$: $f(a_i) = a_i \Rightarrow f^{p}(a_i) = a_i$.

$[f/[p+1,n] = Id_E] \Rightarrow [(f/[p+1,n])^{p} = (Id_{[p+1,n]})^{p} = Id_{[p+1,n]}]$

b. $\forall i \in [1,p-1]$ $f(a_i) = a_{i+1}$

et $f(a_p) = a_1$

montrons d'abord que : $f^{p}(a_1) = a_1$

$f^{p}(a_1) = f[f^{p-1}(a_1)]$

or par définition de f on a : $\forall i \in [2,p]$: $f^{i-1}(a_1) = a_i$ (ex : $f^{2}(a_1) = a_3$, ici $i=3$).

Donc pour $i=p$ $f^{p-1}(a_1) = a_p$ et par conséquent

$f^{p}(a_1) = f[f^{p-1}(a_1)] = f(a_p) = a_1$

soit : $f^{p}(a_1) = a_1$

montrons à présent que : $\forall i \in [2,p]$:

$f^{p}(a_i) = a_I$

$f^{p}(a_i) = f^{p}[f^{i-1}(a_1)] = f^{i-1}[f^{p}(a_1)] = f^{i-1}(a_1) = a_i$

donc $\forall$ i $\in$ [2,p] : $f^p(a_i) = a_i$

comme $\{a_1,a_2,.....a_n\}=\{a_1\}\cup\{a_2,.....a_p\}\cup\{a_{p+1},.....a_n\}$

on a donc : $(\forall\ i \in [1,n] : f^p(a_i) = a_i) \Leftrightarrow (f^p = Id_E)$

➲ **remarque :**

on a : $f^p . f^{i-1} = f^{i-1} . f^p$ (propriété des puissances entières des transformations).

3.

soit n $\in$ Z on a $\{ n = Pe + r, e \in Z, 0 \leq r \leq P-1\}$ (division entière de n par $P \in N^*$)

$f^n = f^{pe+r} = f^{pe} . f^r$ (propriété des puissances d'une transformation)

$f^{pe} . f^r = (f^p)^e . f^r = (Id_E)^e . f^r = Id_E . f^r = f^r \quad 0 \leq r \leq P-1$

donc $\forall$ n$\in$Z $f^n \in \{f^0, f^1, , , , , , , , , , , , f^{p-1}\} = \{ Id_E, f^1, , , , , , , , , , , , f^{p-1}\}$

$(Id_E = f^0)$

$f^1 = f$

finalement pour n $\in$ Z : $f^n \in \{ Id_E, f^1, f^2, , , , , , , , , , , f^{p-1}\}$

➲ **commentaire :**

- les applications du type f de l'exercice précédent sont appelées cycles d'ordre P de E (ou permutation circulaire d'ordre P).
- Id_E est un cycle d'ordre 1.
- un cycle de E d'ordre 2 est appelé transposition de E ; il est le seul cycle involutif de E (p=2) .
- un cycle d'ordre p n'admet que (p) puissances entières différentes.
- les puissances entières (positives et négatives) d'un cycle d'ordre p constituent une suite périodique de période p ($f^{n+p} = f^n . f^p = f^n . Id_E = f^n$).

un cycle d'ordre n = card E est appelé permutation circulaire de E défini par :

$f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3$..... $f(a_i) = a_{i+1}$ pour $i \in [1,n-1]$ et

$f(a_n) = a_1$

- pour un cycle d'ordre P : si $f(a_i) \in \{a_1,a_2,.....a_p\}$ alors pour $i\in[1,p]$

$f^{-1}(a_i) \in \{a_1,a_2,.....a_p\}$ car :

$f^{-1}(a_2) = a_1$

$f^{-1}(a_3) = a_2$

$f^{-1}(a_i) = a_{i-1} \qquad \forall i\in[2,p].$

et $f^{-1}(a_1) = a_p \quad (\text{car } f(a_p) = a_1)$

l'ensemble des puissances entières d'un cycle d'ordre p est un groupe fini d'ordre p quoique Z soit infini

on a : $\forall i\in[0,p-1] : (fi)^{-1} = f^{-i} = f^{p-i}$

exercice :3

soit $E = \{a_1,a_2,.....a_n\}$ et $f \in Perm(E)$. $(n\in N^*)$

1. montrer que $\forall\ i\in [1,n]\ \exists k :\ 1 \le k \le n :\ f^k(a_i) = a_i$

2. en déduire la construction d'un cycle d'ordre k de E

3. considérons la relation $\mathcal{R}$ sur E définie par :

$(x\ \mathcal{R}\ y) \Leftrightarrow (\exists k\in Z :\ f^k(a) = y).$

a. montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence .

b. définir cl(a) (classe d'équivalence de a / $a\in E$)

4. en déduire qu'a toute permutation $f\in Perm(E)$

on associe un nombre fini de cycles dont la somme des ordres vaut n.

Solution :

il suffit de prouver cela pour i=1 par exemple ;

1.considérons la suite a_1 , $f(a_1)$, $f^2(a_1)$,..... $f^n(a_1)$

cette suite comporte (n+1) éléments de E ($\forall i\in[1,n] :\ f^i(a_1) \in E$) qui ne contient que n éléments .il existe donc deux éléments (termes) de la suite égaux.

Donc $\quad : \exists(p,q)\in[0,n]^2 : p \ne q :\ f^p(a_1) = f^q(a_1)$

$(f^0(a_1) = Id_E(a_1) = a_1)$

supposons que p>q : $(f^{p}(a_1) = f^{q}(a_1)) \Leftrightarrow ((f^{-q} . f^{p})(a_1) = (f^{-q} . f^{q})(a_1) = a_1)$

(f^{-q} étant l'inverse de f^{q})

soit $f^{p-q}(a_1) = a_1$

posons p-q =k $\qquad k \in N^*$ (p>q).

donc $f^{k}(a_1) = a_1 \qquad k \leq n$ (car $p \leq n$; $q < n$)

2. posons : $a = a_1$ et

$f(a) = a_2 = f(a_1)$

$f(a_2) = f^2(a_1) = a_3$

$f(a_3) = f^3(a_1) = a_4$

.

.

$f(a_{k-1}) = f^{k-1}(a_1) = a_k$

$f(a_k) = f^{k}(a_1) = a_1$

k étant le nombre (p-q) défini en 1.

et $\forall i \notin [1,k]$: $f(a_i) = a_I$

f est un cycle d'ordre k.

3.

a.

- $(\forall x \in E : f^0(x) = Id_E(x) = x) \Leftrightarrow (x \mathcal{R} x)$ $\quad \mathcal{R}$ est réflexive $\qquad (k=0)$
- $(\forall (x,y) \in E^2 : f^k(x) = y) \Rightarrow (f^{-k}(y) = x)$

donc $(x \mathcal{R} y) \Rightarrow (y \mathcal{R} x)$ et $\mathcal{R}$ est symétrique $((f^{-k} . f^{k})(x) = Id_E(x) = x)$

- $(f^{k1}(x) = y$ et $f^{k2}(y) = z) \Rightarrow (f^{k1+k2}(x) = z$ ($k_1+k_2 \in Z$ dès que $k_1 \in Z$ et $k_2 \in Z$)

car $f^{k1+k2} = f^{k1} . f^{k2} = f^{k2} . f^{k1}$

donc $(x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} x) \Rightarrow (x \mathcal{R} z)$ et $\mathcal{R}$ est transitive.

La relation $(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow$ (y est l'image de x par une puissance entiére de $f \in$ Perm(E)) est une relation d'équivalence sur $E = \{ a_1, \ldots\ldots\ldots a_n\}$ $(n \in N^*)$

b. $cl(a) = \{ x \in E : x = f^{u}(a), u \in Z \}$

explicitons $cl(a_1)$:

si $u \in N$: $f^u(a) = f^{ke+r}$, k étant le nombre définie en 1.

avec $u = ke+r$ (division euclidienne de u par k) $0 \leq r \leq k-1\}$

$f^u = f^{ke+r} = f^{ke} . f^r = f^r . f^{ke}$

$f^u(a) = (f^r . f^{ke})(a) = f^r[f^{ke}(a)]$

montrons par récurrence sur $e \in N$ que : $(f^{ke})(a) = a$

pour $e = 0$ $f^0(a) = Id_E(a) = a$ (vraie)

prouvons l'implication : $(f^{ke}(a) = a) \Rightarrow (f^{k(e+1)}(a) = a)$

en effet : $(f^{k(e+1)})(a) = (f^{ke} . f^k)(a) = (f^k . f^{ke})(a) = f^k[f^{ke}(a)] = f^k(a) = a$, voir 1.

donc $\forall e \in N : (f^{ke})(a) = a$

et $f^u(a) = f^r(a)$ avec $r \in \{0,1, \ldots\ldots\ldots(k-1)\}$

pour $u \in N$ $f^u(a) \in \{a, f(a), \ldots\ldots\ldots\ldots f^{(u-1)}(a)\}$ (1)

pour $u \in Z^-$ $u = ke + r$ $e \in Z^-$ $0 \leq r \leq k-1$

posons $e = (-é)$ $é \in N$

u devient alors $u = -ké + r$, $0 \leq r \leq k-1$ $é \in N$

$f^u = f^{-ké+r} = f^r . f^{-ké}$ $0 \leq r \leq k-1$

et $f^u(a) = f^r[f^{-ké}(a)]$ $é \in N$

montrons à présent que $\forall é \in N$

$f^{-ké}(a) = a$

pour $é = 0$ $f^0(a) = Id_E(a) = a$ vrai

établissons l'implication : $(f^{-ké}(a) = a) \Rightarrow (f^{-k(é+1)}(a) = a)$

en effet : $f^{-k(é+1)}(a) = (f^{-k} . f^{-ké})(a) = f^{-k}[f^{-ké}(a)] = f^{-k}(a) = a$ (voir 1.)

car $(f^k(a) = a) \Leftrightarrow (f^{-k}(a) = a)$

donc $\forall é \in N : f^{-ké}(a) = a$

revenons maintenant à $= f^u(a)$ avec $u \in Z^-$.

on a : $f^u(a) = f^r[f^{-ké}(a)] = f^r(a_1)$ $0 \leq r \leq k-1$ $é \in N$ (1).

donc $\forall u \in Z^-$: $f^u(a) \in \{a, f(a), \ldots\ldots\ldots f^{k-1}(a)\}$ (2)

en regroupant les résultats (1) et (2) on a alors

$\forall u \in Z : f^{u}(a) \in \{a , f(a) ,\ldots\ldots\ldots f^{k-1}(a)\}$

k étant le nombre défini en 1.(ou l'ordre du cycle construit en 2.)

donc $\boxed{cl(a) = \{a , f(a) ,\ldots\ldots\ldots f^{k-1}(a)\}}$

4. la permutation $f \in$ Perm (E) induit par la relation $\mathcal{R}$ définie en 3. une partition finie (E étant fini) de E dont chaque élément est une classe d'équivalence cl(a) comporte un nombre fini $1 \leq k \leq n$ (voir encadré)

$\forall a \in E$ $cl(a) = \{a , f(a) ,\ldots\ldots\ldots f^{k-1}(a)\}$ et $\forall i \in [0,k-1]$: $f^{i+1}(a) = f[f^{i}(a)]$; $f^{k}(a) = a$

$(f^{0}(a) = Id_E(a) = a)$

$E = cl(a) \cup (E - cl(a)) = \{f^{0}(a), f^{1}(a) \ldots\ldots f^{k-1}(a)\} \cup E - \{f^{0}(a), f^{1}(a) \ldots f^{k-1}(a)\}$

Considérons le cycle C_k tel que : $\forall i \in [0,k-1]$: $C_k(f^{i}(a)) = f^{i+1}(a)$.

$\forall b \in E - \{f^{0}(a), f^{1}(a) \ldots\ldots f^{k-1}(a)\}$.

$C_k(b) = b$, C_k est un cycle d'ordre k

comme $\bigcup_{a \in E} cl(a) = E$ et que deux classes d'équivalence différentes sont disjointes

alors : $\text{card} \bigcup_{a \in E} cl(a) = \sum_{a \in E} cl(a) = n$

on peut donc énoncer :

à toute permutation $f \in$ Perm(E) on associe un nombre fini de cycles dont la somme des ordres vaut n : [card cl(a) = ordre $C_k = k$]

Exercice 4 :

Montrer que deux cycles disjoints c_p et c_q d'ordre p et q d'un ensemble E à n éléments:

1.a. permutent c'est à dire : $c_p \cdot c_q = c_q \cdot c_p$

et que

b. $\forall n \in N : (c_p \cdot c_q)^n = (c_p)^n \cdot (c_q)^n = (c_q)^n \cdot (c_p)^n$

2. montrer que toute permutation $f \in Perm(E)$ où E est un ensemble fini à n éléments se décompose en produit de ses cycles disjoints.

3. montrer qu'il existe $\mu \in \mathbb{N}^*$: $f^{\mu} = Id_E$.

Solution

1.

a. (c_p et c_q cycles disjoints) $\Leftrightarrow$($\exists$![$(a_1,\ldots\ldots a_p)$, $(b_1,\ldots\ldots b_q)$]$\in E^p \times E^q$ telles que :

$\forall\, i \in [1,p]$, $\forall\, j \in [1,q]$: $a_i \neq b_j$)

$c_p : E \rightarrow E$: $\forall\, i \in [1,p-1]$: $c_p(a_i) = a_{i+1}$; $c_p(a_p) = a_1$;

$\forall\, x \in E - \{a_1,\ldots\ldots a_p\}$: $c_p(x) = x$.

$c_q : E \rightarrow E$: $\forall\, j \in [1,q-1]$: $c_q(b_i) = b_{j+1}$; $c_q(b_q) = b_1$;

$\forall\, x \in E - \{b_1,\ldots\ldots b_q\}$: $c_q(x) = x$.

l'application $c_p \,.\, c_q$ est définie par : $\forall\, x \in E$, $(c_p \,.\, c_q)(x) = c_p[c_q(x)]$

- si $x \in \{a_1,\ldots\ldots a_p\}$: $c_q(x) = x$ (car $x \notin \{b_1,\ldots\ldots b_q\}$).

et $c_p[c_q(x)] = c_q(x)$. Donc $\forall\, x \in \{a_1,\ldots\ldots a_p\}$:$(c_p \,.\, c_q)(x) = c_p(x)$

- si $x \in \{b_1,\ldots\ldots b_q\}$: $c_q(x) \in \{b_1,\ldots\ldots b_q\}$ donc $c_q(x) \notin \{a_1,\ldots\ldots a_p\}$

et $c_p[c_q(x)] = c_q(x)$. Donc $\forall\, x \in \{b_1,\ldots\ldots b_q\}$:$(c_p \,.\, c_q)(x) = c_q(x)$

- si $x \notin \{a_1,\ldots\ldots a_p\} \cup \{b_1,\ldots\ldots b_q\}$.

$c_q(x) = x$ et $c_p(c_q(x)) = c_p(x) = x$.Donc$\forall x \notin \{a_1,\ldots\ldots a_p\} \cup \{b_1,\ldots\ldots b_q\}$:$(c_p \,.\, c_q)(x) = x$

finalement: $c_p \,.\, c_q : E \rightarrow E$

$$x \rightarrow \begin{cases} c_p(x) \text{ si } x \in \{a_1,\ldots\ldots a_p\} \\ c_q(x) \text{ si } x \in \{b_1,\ldots\ldots b_q\} \\ x \quad \text{ si } x \notin \{a_1,\ldots\ldots a_p\} \cup \{b_1,\ldots\ldots b_q\} \end{cases}$$

l'application $c_q . c_p$ est définie par : $\forall\, x \in E$ $(c_q . c_p)(x) = c_q[c_p(x)]$.

- si $x \in \{a_1,\ldots\ldots a_p\}$: $c_p(x) \in \{a_1,\ldots\ldots a_p\}$ et donc $c_p(x) \notin \{b_1,\ldots\ldots b_q\}$

et $c_q[c_p(x)] = c_p(x)$. Donc $\forall\, x \in \{a_1,\ldots\ldots a_p\}$: $(c_q . c_p)(x) = c_p(x)$

- si $x \in \{b_1, \ldots\ldots b_q\}$: alors $x \notin \{a_1, \ldots\ldots a_p\}$ et $c_p(x) = x$

et $c_q[c_p(x)] = c_q(x)$. Donc $\forall x \in \{b_1, \ldots\ldots b_q\}$: $(c_q . c_p)(x) = c_q(x)$

- si $x \notin \{a_1, \ldots\ldots a_p\} \cup \{b_1, \ldots\ldots b_q\}$: $c_p(x) = x$ et $c_q[c_p(x)] = c_q(x) = x$

donc $\forall x \notin \{a_1, \ldots\ldots a_p\} \cup \{b_1, \ldots\ldots b_q\}$:$(c_q . c_p)(x) = x$

finalement: $c_q . c_p : E \to E$

$$x \to \begin{cases} c_p(x) \text{ si } x \in \{a_1, \ldots\ldots a_p\} \\ c_q(x) \text{ si } x \in \{b_1, \ldots\ldots b_q\} \\ x \quad \text{ si } x \notin \{a_1, \ldots\ldots a_p\} \cup \{b_1, \ldots\ldots b_q\} \end{cases}$$

$\forall x \in E$:$(c_p . c_q)(x) = (c_q . c_p)(x)$ et $c_p . c_q = c_q . c_p$ deux cycles disjoints permutent

➲ remarque :

si $(c_i)_{i \in [1,n]}$ est une famille finie de cycles disjoints deux à deux i.e :

$\forall i,j \in [1,n]$: c_i et c_j disjoints

$\prod_{i=1}^{i=n} C_i$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel est effectué le produit, étant entendu que le produit d'applications est associatif.

b. $\forall n \in N$: $(c_p . c_q)^n = \underbrace{(c_p . c_q) . (c_p . c_q) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (c_p . c_q)}_{n \text{ fois}}$

c'est le produit de 2n cycles : n cycles égaux à c_p, n cycles égaux à c_q avec c_p et c_q disjoints

montrons que : $(c_p . c_q)^n = c_p^{\,n} . c_q^{\,n}$ par récurrence sur $n \in N$

pour n = 0 : $(c_p . c_q)^0 = Id_E = c_p^{\,0} . c_q^{\,0} = Id_E . Id_E$ (vraie)

- prouvons l'implication :$[(c_p . c_q)^n = c_p^{\,n} . c_q^{\,n}] \Rightarrow [(c_p . c_q)^{n+1} = c_p^{\,n+1} . c_q^{\,n+1}]$

on a : $(c_p . c_q)^{n+1} = c_p . c_q . (c_p . c_q)^n = (c_p . c_q) . (c_p^{\,n} . c_q^{\,n})$

montrons à présent que si c_p et c_q sont disjoint $c_q . c_p^{\,n} = c_p^{\,n} . c_q$

procédons par récurrence sur $n \in N$ pour n =0 $c_p^{\,0} = Id_E$

$c_q . Id_E = Id_E . c_p$ (vraie)

- montrons l'implication : $(c_q . c_p^{\,n} = c_p^{\,n} . c_q) \Rightarrow (c_q . c_p^{\,n+1} = c_p^{\,n+1} . c_q)$

on a : $c_q . c_p^{n+1} = c_q(c_p^n . c_p) = (c_q . c_p^n) . c_p$

comme $c_q . c_p^n = c_p^n . c_q$ (hypothèse de récurrence)

alors $c_q . c_p^{n+1} = (c_p^n . c_q) . c_p = c_p^n . (c_p . c_q) = (c_p^n . c_p) . c_q = c_p^{n+1} . c_q$

donc si $c_q . c_p^n = c_p^n . c_q$ alors $c_q . c_p^{n+1} = c_p^{n+1} . c_q$

finalement: $\boxed{\text{si } c_p . c_q = c_q . c_p \text{ alors } \forall n \in N : c_p^n . c_q = c_q . c_p^n}$

revenons à : $(c_p . c_q)^{n+1} = c_p . c_q . (c_p^n . c_q^n) = c_p . (c_q . c_p^n) . c_q^n$

$c_p . (c_q . c_p^n) . c_q^n = c_p . (c_p^n . c_q) . c_q^n = (c_p . c_p^n) . (c_q . c_q^n)$

$(c_p . c_p^n) . (c_q . c_q^n) = c_p^{n+1} . c_q^{n+1}$

ce qui achève de prouver que : si $(c_p . c_q)^n = c_p^n . c_q^n$ alors $(c_p . c_q)^{n+1} = c_p^{n+1} . c_q^{n+1}$

donc $\forall n \in N$: si c_p et c_q sont deux cycles disjoints $(c_p . c_q)^n = c_p^n . c_q^n$

d'autre part : $(c_p . c_q)^n = (c_q . c_p)^n = c_q^n . c_p^n$

finalement $\boxed{\forall n \in N : (c_p . c_q)^n = (c_q . c_p)^n = c_p^n . c_q^n = c_q^n . c_p^n}$

➲ remarque :

nous venons d'établir un résultat important que l'on peut énoncer comme suit :

si c_p et c_q sont deux cycles disjoints d'un ensemble E à n éléments :

- ils permutent $c_p . c_q = c_q . c_p$
- toute puissance entière positive de l'un permute avec toute autre puissance entière positive de l'autre.

En effet : nous avons déjà établi que : $\forall n \in N : c_q . c_p^n = c_p^n . c_q$

en procédant de la même manière on montre que : $\forall n' \in N : c_p . c_q^{n'} = c_q^{n'} . c_p$

prouvons par récurrence sur $n \in N$ que $c_p^n . c_q^{n'} = c_q^{n'} . c_p^n$

pour $n = 0$: $c_p^0 . c_q^{n'} = Id_E\, c_p^{n'} = c_q^{n'}$

et $c_q^{n'} . c_p^0 = c_q^{n'} . Id_E = c_q^{n'}$ $\qquad c_p^0 . c_q^{n'} = c_q^{n'} . c_p^0$ (Vraie)

$(c_p^n . c_q^{n'} = c_q^{n'} . c_p^n) \Rightarrow (c_p^{n+1} . c_q^{n'} = c_q^{n'} . c_p^{n+1})$

on a $c_p^{n+1} . c_q^{n'} = (c_q . c_p^n) . c_q^{n'} = c_p . (c_p^n . c_q^{n'}) = c_p . (c_q^{n'} . c_p^n)$

$c_p . (c_q^{n'} . c_p^n) = (c_p^n . c_q^{n'}) . c_p^n = (c_q^{n'} . c_p) . c_p^n = c_q^{n'} . (c_p . c_p^n) = c_q^{n'} . c_p^{n+1}$

donc $(c_p^n . c_q^{n'} = c_q^{n'} . c_p^n) \Rightarrow (c_p^{n+1} . c_q^{n'} = c_q^{n'} . c_p^{n+1})$

on peut établir: $(c_p^n . c_q^{n'} = c_q^n . c_p^n) \Rightarrow (c_p^n . c_q^{n'+1} = c_q^{n'+1} . c_p^n)$ (récurrence sur $n' \in N$)

donc $\boxed{\forall(n,n') \in N^2 \text{ si } c_p \text{ et } c_q \text{ sont disjoints alors : } c_p^{\,n} . c_q^{\,n'} = c_q^{\,n'} . c_p^{\,n}}$

analogie frappante avec $(a \wedge b = 1) \Rightarrow (\forall(k_1,k_2) \in N^2 : a^{k1} \wedge b^{k2} = 1)$

➲ remarque:

ce résultat pourrait être généralisé à tout couple de transformations qui permutent :

c'est à dire :

si T et T' sont deux transformations de E : T.T'= T'.T alors :

$\forall(n,n') \in N^2 : (T)^n.(T')^{n'} = (T')^{n'}.(T)^n$

et 2 cycles disjoints de E n'est qu'un cas particulier d'un couple de transformations de E qui permutent.

2.

Soient $c_1, c_2, ..c_p$ les p cycles disjoints deux à deux associés à la permutation $f \in$ perm(E) et d'ordre respectifs $k_1, k_2, ...k_p$. on a : $\sum_{i=1}^{i=p} k_i = n$ (voir 4. exercice3)

et soit : $\{\{a_1c_1, ...a_{k_1}c_1\}, \{a_1c_2, ...a_{k_2}c_2\}, ..., \{a_1c_p, ... a_{k_p}c_p\}\}$ la permutation de E induite par f.

On a : $E = \bigcup_{i \in [1,p]} \{a_1c_i, ...a_{k_i}c_i\}$ et $\forall(i,j) \in [1,p]^2$: $i \neq j$ $\{a_1c_i, ...a_{k_i}c_i\} \cap \{\{a_1c_j, ...a_{k_j}c_j\} = \phi$

on a : $\forall$ $i \in [1,p]$: $c_i(x) = f(x)$ si $x \in \{a_1c_i, ...a_{k_i}c_i\}$

$c_i(x) = x$ si $x \notin \{a_1c_i, ...a_{k_i}c_i\}$

soit à présent $x \in E$: $x \in E = \bigcup_{i \in [1,p]} \{a_1c_i, ...a_{k_i}c_i\} \Leftrightarrow \exists i_0 \in [1,p]$: $x \in \{a_1c_{i0}, ..a_{k_{i0}}c_{i0}\}$ on a:

$$(\prod_{i=1}^{i=p} C_i)(x) = (C_{i_0} \prod_{\substack{i=1 \\ i=I_0}}^{i=p} C_i)(x) = C_{i_0} (\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq I_0}}^{i=p} C_i)(x) = C_{i_0}(x) = f(x)$$

car $\forall$: $i \neq i_0$ $x \notin \{a_1, c_i, ...a_{ki}, c_i\}$ et donc $c_i(x) = x$ et par suite

$(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq I_0}}^{i=p} C_i) = x$ donc $\forall x \in E$, $(\prod_{i=1}^{i=p} C_i)(x) = c_{i0}(x) = f(x) \Leftrightarrow (\prod_{i=1}^{i=p} C_i)(x) = f$

la permutation f est donc le produit de ses p cycles deux à deux disjoints

$(\prod_{i=1}^{i=p} C_i = c_1, c_2, c_3, ...c_p)$

3. on a : $\forall i \in [1,p] : C_i = Id_E$ (voir exercice 2. 2)

soit μ = p.p.c.m $(k_1,k_2,\ldots\ldots k_p)$ alors : $\forall i \in [1,p]$, $\exists \lambda_i \in N^*$: $\mu = \lambda_i k_I$

$$f = \prod_{i=1}^{i=p} C_i \Rightarrow f^{\mu} = (\prod_{i=1}^{i=p} C_i)^{\mu} = \prod_{i=1}^{i=p} C_i^{\mu} = \prod_{i=1}^{i=p} C_i^{k_i\lambda_i} = \prod_{i=1}^{i=p} (C_i^{k_i})^{\lambda_i} = \prod_{i=1}^{i=p} (Id_E)^{\lambda_i} = Id_E$$

donc pour μ =p.p.c.m $(k_1,k_2,\ldots\ldots k_p)$ on a : $f^{\mu} = Id_E$

➲ **remarque :**

1. $\forall n = k'.\mu$ $(k \in N)$

on a : $f^{k.\mu} = (f\mu)^k = (Id_E)^k = Id_E$

2. $(f^{\mu} = Id_E) \Leftrightarrow (f^{-\mu} = (f^{\mu})^{-1} = (Id_E)^{-1} = Id_E)$

3. $\forall n \in Z\ \exists (k,r) \in Z \times N : n = k\mu + r,\ 0 \leq r \leq \mu - 1$ (division euclidienne de n par μ).

alors $f^n = f^{k\mu+r} = f^{k\mu}.\ f^r = f^r.\ f^{k\mu} = f^r(f^{\mu})^k = f^r (r \in \{0,\ldots\ldots p_0-1\}$

car $\forall k \in Z : (f^{\mu})^k = (Id_E)^k = Id_E$

donc $\forall\ n \in Z,\ f^n \in \{Id_E,\ f,\ldots\ldots f^{\mu-1}\}$

μ = p.p.c.m $(k_1,k_2,\ldots\ldots k_p)$

les nombres $k_1,k_2,\ldots\ldots k_p$ étant les ordres respectifs des cycles $c_1,\ldots\ldots c_p$ associés à f

$k_1,\ldots\ldots k_p = M = card(E)$.

Exercice 5 :

soit $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ et $f : E \rightarrow E$ telle que :

$f(1)=7,\ f(2)=2,\ f(3)=1,\ f(4)=8,\ f(5)=3,\ f(6)=9,\ f(7)=5,\ f(8)=6,\ f(9)=4$

On appelle diagramme de **Cayley** de f le diagramme obtenu en joignant x et $f(x)$ par une flèche partant de x et arrivant à $f(x)$.

exemple : $1 \rightarrow 7 \rightarrow 5$ $f(1)=7$ et $f(7)=5$

1. établir le digramme de cayley de f

2. déterminer la partition de E induite par f

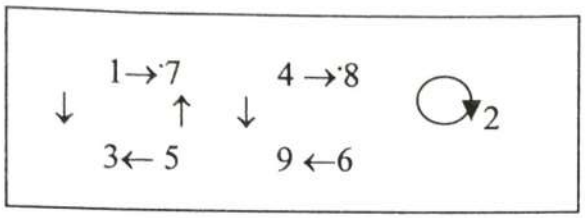
3. décomposer f en produit de cycles disjoints 2 à 2

4. déterminer $n \in N^*$: $f^n = Id_E$

5. établir la table de: f^n

Solution :

1. diagramme de Cayley de f :



2. il ressort du diagramme de Cayley que la partition de E induite par f est :

$\{\{1,7,5,3\},\{4,8,6,9\},\{2\}\}$

3)les cycles 2 à 2 disjoints associés à f sont :

c_1 : $c_1(1)=7$

$c_1(7)=5$ et $\forall\, x \in E-\{1,7,5,3\}$: $c_1(x) = x$

$c_1(5)=3$

$c_1(3)=1$

c_2 : $c_2(4)=8$

$c_2(8)=6$ et $\forall\, x \in E-\{4,8,6,9\}$: $c_2(x) = x$

$c_2(6)=9$

$c_2(9)=4$

c_3 : $c_3(2)=2$ et $\forall\, x \in E-\{2\}$: $c_3(x)=x$

$c_3 = Id_E$

on a : $f = \prod_{i=1}^{i=3} C_i = c_1 . c_2 . c_3 = c_3 . c_1 . c_2 = c_3 . c_2 . c_1 = c_1 . c_3 . c_2 = c_2 . c_1 . c_3 = c_2 . c_3 . c_1$

4. c_1 est d'ordre 4

c_2 est d'ordre 4

c_3 est d'ordre 1

p.p.c.m (4,4,1) = 4 donc n = 4 on a donc $f^4 = Id_E$

5. tableau de f^4

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f(x)	7	2	1	8	3	9	5	6	4
$f^2(x)$	5	2	7	6	1	4	3	9	8
$f^3(x)$	3	2	5	9	7	8	1	4	6
$f^4(x)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

le tableau de f^4 confirme que $f^4 = Id_E$ puisque $\forall\, x \in E$: $f^4(x) = x$

on a aussi : 4+4+1 =9 = card E.

CHAPITRE A SECTION 4

(9 Exercices, 19 Questions)

Images et pré-images. ▪

Exercice:1

Soit $f : E \to F$ une application et $P \subset E$, $\phi \subset F$

Montrer que :

1. $(f/p)^{-1}(\phi) = P \cap f^{-1}(\phi)$

2. $f[P \cap f^{-1}(\phi)] = f(p) \cap \phi$

Solution :

1.

a) $(f/p)^{-1}(\phi) \subset P \cap f^{-1}(\phi)$

soit $x \in (f/p)^{-1}(\phi)$: $(x \in (f/p)^{-1}(\phi)) \Leftrightarrow (x \in p$ et $(f/p)(x) \in \phi)$

comme $f/p : P \to F$ alors $\forall x \in P : f|p(x) = f(x)$

$((f/p)(x) \in \phi) \Leftrightarrow (x \in p$ et $f(x) \in \phi) \Leftrightarrow (x \in p$ et $x \in f^{-1}(\phi)) \Leftrightarrow (x \in p \cap f^{-1}(\phi))$, d'où l'inclusion

b) montrons à présent que : $p \cap f^{-1}(\phi) \subset (f/p)^{-1}(\phi)$

soit $x \in P \cap f^{-1}(\phi)$ alors $(x \in p$ et $f(x) \in \phi) \Leftrightarrow (f/p(x) \in \phi) \Leftrightarrow (x \in (f/p)^{-1}(\phi))$ d'où l'inclusion

2. montrons que $f[p \cap f^{-1}(\phi)] = f(p) \cap \phi$

a) montrons d'abord que : $f[p \cap f^{-1}(\phi)] \subset f(p) \cap \phi$

$(y \in f[p \cap f^{-1}(\phi)]) \Leftrightarrow (\exists x \in P \cap f^{-1}(\phi) : y = f(x), x \in P \cap f^{-1}(\phi)) \Leftrightarrow (x \in P$ et $x \in f^{-1}(\phi))$

donc $(y = f(x), x \in P)$et $(y = f(x)$ et $x \in f^{-1}(\phi)]$. c.à.d $[y \in f(p)$ et $y \in \phi] \Leftrightarrow y \in f(p) \cap \phi$

$(x \in f^{-1}(\phi) \Leftrightarrow (f(x) \in \phi)$, d'où l'inclusion

b) montrons à présent que : $f(p) \cap \phi \subset f[p \cap f^{-1}(\phi)]$

$(y \in f(p) \cap \phi) \Leftrightarrow (y \in f(p)$ et $y \in \phi) \Leftrightarrow (y = f(x), x \in P$ et $y \in \phi)$

mais $(f(x) \in \phi) \Leftrightarrow (x \in f^{-1}(\phi))$,

donc$[y = f(x)$ et $x \in P \cap f^{-1}(\phi)] \Leftrightarrow (y \in f[p \cap f^{-1}(\phi)])$, d'où l 'inclusion

Exercice:2

$f: R \to R$

$x \to \sin \pi x$

Determiner $\mathrm{Im} f$, $f(R^+)$, $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{0,1\})$, $f(Z)$ et $f^{-1}(Z)$.

Solution:

- $\mathrm{Im} f = \{ f(x): x \in R \} = [-1,1]$, $(-1 \leq \sin \pi x \leq 1)$
- $f(R^+) = \{ f(x), x \in R^+\} = \{ \sin \pi x, x \in R^+\}$

nous avons $\forall x \in R^+$, $\exists k \in N$ et $x_0 \in [0,2[$: $x = 2k + x_0$ ($x \to \sin \pi x$ est de période

2)

alors $\pi x = 2k\pi + \pi x_0$, $\sin \pi x = \sin (2k\pi + \pi x_0) = \sin \pi x_0$ $(0 \leq \pi x_0 \leq 2\pi)$

$-1 \leq \sin \pi x_0 \leq +1$ et $f(R^+) = [-1,1]$

- $f(Z) = \{ \sin \pi x , x \in Z\} = \{0\}$
- $f^{-1}(Z) = \{ x \in R: \sin \pi x \in Z\} = \{ x \in R: \sin \pi x \in \{-1,1,0\}\}$
- $\sin \pi x = 0 \Leftrightarrow x \in Z$
- $\sin \pi x = 1 \Leftrightarrow \pi x = \pi/2 + 2k\pi$, $(k \in Z) \Leftrightarrow x = 1/2 + 2k$, $(k \in Z)$, $x \in (2Z+1/2)$
- $\sin \pi x = -1 \Leftrightarrow \pi x = -\pi/2 + 2k\pi$, $(k \in Z) \Leftrightarrow x = -1/2 + 2k \Leftrightarrow x \in (2Z-1/2)$

donc $f^{-1}(Z) = Z \cup (2Z+1/2) \cup (2Z-1/2)$

- $f^{-1}\{0\} = \{ x \in R: f(x) = 0\} = \{ x \in R: \sin \pi x = 0\} = Z$
- $f^{-1}(\{0,1\}) = \{ x \in R: f(x) \in \{0,1\} = \{ x \in R: \sin \pi x = 0\} \cup \{x \in R : \sin \pi x = 1\}$

$\{ x \in R: \sin \pi x = 0\} \cup \{x \in R : \sin \pi x = 1\} = Z \cup (2Z+1/2)$

Exercice :3

soient $f : E \to F$ une application et A_1 A_2 deux parties de E.

1. Montrer que si $f/_{A_1 \cup A_2}$ est injective alors $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$.

2. la réciproque est-elle vraie ?

Solution:

1. ($f/_{A_1 \cup A_2}$ injective) $\Rightarrow (f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2))$

$(y \in f(A_1) \cap f(A_2)) \Leftrightarrow (\exists\ (x_1,x_2) \in A_1 \times A_2\ ,\ y = f(x_1) = f(x_2))$

$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$ car $f/_{A_1 \cup A_2}$ injective.

Donc $(x_1,x_2) \in (A_1 \cap A_2)^2$ et $y \in f(A_1 \cap A_2)$ d'ou l'inclusion

2. l'inclusion $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ entraîne t-elle que $f/_{A_1 \cup A_2}$ est injective ?

la réponse est non car :

$[y \in f(A_1) \cap f(A_2)] \Rightarrow [y \in f(A_1 \cap A_2)] \Leftrightarrow [(\exists (x_1,x_2) \in A_1 \times A_2 : y = f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (\exists x_3 \in A_1 \cap A_2 : y = f(x_3))]$

on peut avoir $x_1 \neq x_3$ ou $x_2 \neq x_3$, ou $(x_1 \neq x_3)$ et $(x_2 \neq x_3)$

(voir le contre exemple qui suit $x_1=2$, $x_2= 6$, $x_3=1$)

dans ce dernier cas y est l'image de x_1 et x_3 de A_1 et de x_2 et x_3 de A_2 avec $x_1 \neq x_2 \neq x_3$

d'où $f/_{A_1}$ non injective, $f/_{A_2}$ non injective et $f/_{A_1 \cup A_2}$ non injective

➲ remarques :

1. (f: E $\rightarrow$ F injective) $\Leftrightarrow (\forall A_1 \subset E\ ,\ A_2 \subset E : f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2))$

2. l'inclusion $f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2)$ est en fait une égalité car l'inclusion $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ a toujours lieu $\forall\ f$.

Exemple et contre exemple illustrant l'exercice 3

Exemple 1:

Soient E={1,2,3,4,5},F={8,10,14,16,20,40},A_1={1,2}, $A_1 \cup A_2$={1,2,4,5}, A_2={2,4,5}, $A_1 \cap A_2$={2}

Soit: $f : E \rightarrow F : f(1) = 8,\ f(4) = 14,\ f(2) = 10,\ f(5) = 20,\ f(3) = 8$

$f/_{A_1 \cup A_2}$ injective ,f est non injective sur E ($f(3) = f(1) = 8$)

$f(A_1) = \{8,10\}$, $f(A_2) = \{10,14,20\}$, $f(A_1) \cap f(A_2) = \{10\}$, $f(A_1 \cap A_2) = f(\{2\}) = \{10\}$

$f(A_1) \cap f(A_2) = f(A_1 \cap A_2)$

Cet exemple montre que même avec f non injective,l'égalité $f(A_1)\cap f(A_2)=f(A_1\cap A_2)$ peut avoir lieu.

Exemple 2 : contre exemple

soient $E=\{1,2,3,4,5,6,8\}$,$F=\{0,4,5,7,11\}$,$A_1=\{1,2,3\}$,$A_2=\{1,3,6,8\}$,$A_1 \cap A_2=\{1,3\}$ $A_1 \cup A_2 =\{1,2,3,6,8\}$, $f(A_1 \cap A_2)=\{0,4\}$, $f(A_1) \cap f(A_2)=\{0,4\}\cap\{0,4,5\}=\{0,4\}$

$f(A_1) \cap f(A_2)= f(A_1 \cap A_2)$

Alors que $f/_{A_1\cup A_2}$ est non injective

car $f(1)= f(2)= f(6)=0$

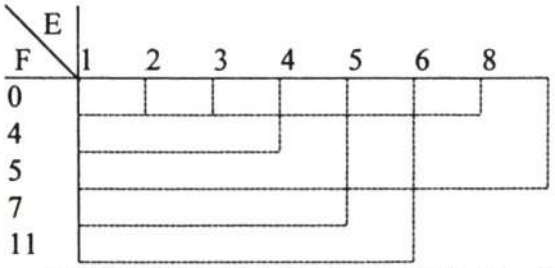


TABLE DE L'APPLICATION $f : E \to F$

Exercice 4 :

1. soit f: $E \to F$ injective

a) montrer que $\forall\ A \subset E$, $f(C_E A) \subset C_F f(A)$

b) la réciproque est-elle vraie ?

2. soit g: $E \to F$ surjective

a) montrer que $\forall\ A \subset E : C_F\, g(A) \subset g[C_E A]$

b) la réciproque est-elle vraie ?

Solution:

1.

a) soient $A\subset E$ et $y\in f[C_E A]$, $[y\in f[C_E A]] \Leftrightarrow [\exists\, x\in C_E A: y=f(x)]$

puisque f est injective alors $\forall x\in A: y\neq f(x)$, donc $(y\notin f(A)) \Leftrightarrow (y\in C_F f(A))$.

d'où : $f(C_E A) \subset C_F f(A)$

b) considérons la fonction : $f : R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\in[0,1] \\ 2 & \text{si } x\in R-[0,1] \end{cases}$$

et $A=[0,1]$.

$f(A)=\{1\}$: $C_R A=R-[0,1]$

$C_R f(A)=R-\{1\}$, $f[C_R(A)]=\{2\}$.

Nous avons $f(C_R A)\subset C_R f(A)$ et f non injective

2. $g : E \to F$ surjective et $A\subset E$.

a) montrons que $C_F g(A)\subset g(C_E A)$

$(y\in C_F g(A))\Leftrightarrow (y\notin g(A)) \Leftrightarrow (\forall x\in A : y\neq g(x))$

comme g est surjective$[\exists x\in C_E A: y= g(x)] \Leftrightarrow (y\in g[C_E A])$

D'où $C_F g(A)\subset g\, C_E A$

b) la réciproque est vraie ; c'est a dire que toute application $g : E\to F$ telle que :

$\forall A\subset E$, $C_F g(A)\subset g(C_E A)$ est surjective.

En effet prenons $A=E$; $C_E E=\phi$ et $g(\phi)=\phi$

Donc on aurait $C_F g(E)\subset g(\phi)=\phi$

i. e $(C_F g(E)=\phi) \Leftrightarrow (g(E)=F)$

$(g(E)=F) \Leftrightarrow$ (g surjective)

➲ remarque :

il suffit qu'il existe une partie A de E vérifiant $C_F g(A)\subset g(C_E A)$ pour que g soit surjective.

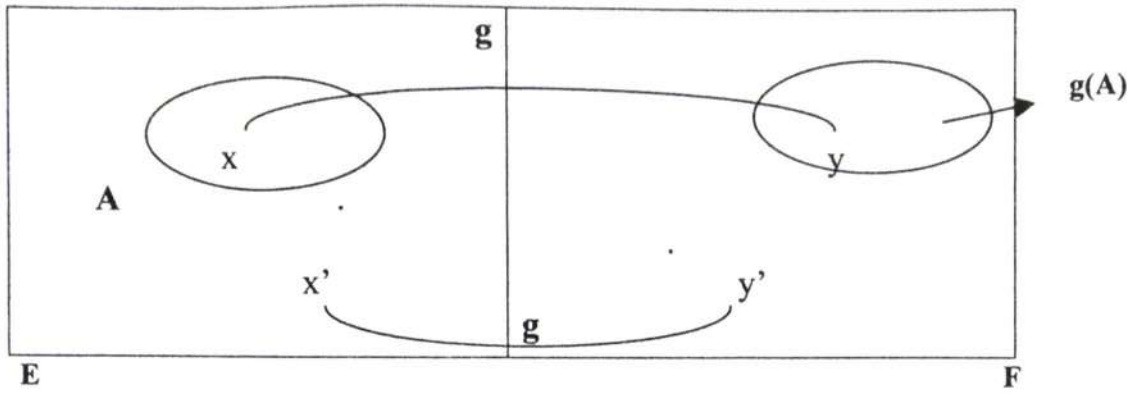
En effet:

Soit $y\in F$ alors $y\in g(A)\cup C_F g(A)$

Si $y\in g(A)$ alors $\exists x\in A: y = g(x)$.

Si $y\in C_F g(A)$ alors $(y\in g(C_E A)) \Leftrightarrow (\exists x\in C_E A: y = g(x))$ (vue l'inclusion ci dessus)

finalement et dans cette condition ,y est l'image d'au moins un element de E.



Exercice :5

soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$.

1. montrer que $f[f^{-1}(B)]=B \cap \operatorname{Im} f$

2. montrer que $[f[f^{-1}(B)]=B] \Leftrightarrow [B \subset \operatorname{Im} f]$

Solution:

1. montrons que $f[f^{-1}(B)]=B \cap \operatorname{Im} f$

a) prouvons que : $f[f^{-1}(B)] \subset B \cap \operatorname{Im} f$

$[y \in f[f^{-1}(B)] \Leftrightarrow [\exists x \in f^{-1}(B): y=f(x)]$

$(x \in f^{-1}(B)) \Leftrightarrow (f(x) \in B)$

D'où $y \in B$ et par suite $y \in B \cap \operatorname{Im} f$ (car $f^{-1}(B) \subset E$)

b) montrons à présent que: $B \cap \operatorname{Im} f \subset f[f^{-1}(B)]$

$(y \in B \cap \operatorname{Im} f) \Leftrightarrow (y \in B$ et $y \in \operatorname{Im} f)$

$(y \in \operatorname{Im} f) \Leftrightarrow [\exists x \in E: y=f(x) \in B] \Leftrightarrow (x \in f^{-1}(B))$.

$[y=f(x)$ et $x \in f^{-1}(B)] \Leftrightarrow (y \in f[f^{-1}(B)])$, donc $B \cap \operatorname{Im} f \subset f[f^{-1}(B)]$

$[(a)$ et $(b)] \Leftrightarrow [f[f^{-1}(B)]= B \cap \operatorname{Im} f]$.

2. on a: $(B \subset \operatorname{Im} f) \Leftrightarrow (B \cap \operatorname{Im} f=B= f[f^{-1}(B)])$ (voir 1^{ére} question)

D'où le résultat: $(B \subset \operatorname{Im} f) \Leftrightarrow (f[f^{-1}(B)]=B)$

➲ remarque:

Dans le cas ou f est surjective $\operatorname{Im} f= f(E)=F$ et $\forall B \subset F, B \subset \operatorname{Im} f$

Donc $\forall B \subset F$: $f(f^{-1}(B)) =B$

.dans le cas général (f non surjective),et comme $B \cap \operatorname{Im} f \subset B$ on a toujours :

$f[f^{-1}(B)] \subset B$

Exercice 6 :

Soient $E \neq \phi$ et $f: P(E) \to P(E)$

$A \in P(E), B \in P(E) : x \to (A \cap x) \cup (B \cap \bar{x})$, $\bar{x}$ étant $C_E x$.

Discuter l'equation : $f(x) = \phi$

Solution

$(f(x) = \phi) \Leftrightarrow ((A \cap x) \cup (B \cap \bar{x}) = \phi)$

$[(A \cap x) \cup (B \cap \bar{x}) = \phi] \Leftrightarrow [A \cap x = \phi$ et $B \cap \bar{x} = \phi]$

$(A \cap x = \phi) \Leftrightarrow (X \subset \bar{A})$ $\qquad \bar{A} = C_E A$

$(B \cap \bar{x} = \phi) \Leftrightarrow (B \subset x)$

Il faut donc que $B \subset x \subset \bar{A}$

Cette condition exige que $B \subset \bar{A}$, $(B \subset \bar{A}) \Leftrightarrow (A \cap B = \phi)$

la condition $(A \cap B = \phi)$ étant vérifiée, tout ensemble x de $P(E)$ vérifiant $B \subset x \subset \bar{A}$ vérifie $f(x) = \phi$

$A \cap x = \phi$, $B \cap \bar{x} = \phi$; $f(x) = \phi \cup \phi = \phi$.

- remarquons que si $A \cap B \neq \phi$ l'équation $f(x) = \phi$ est impossible.

En effet soit $x \in P(E)$: $f(x) = (A \cap x) \cup (B \cap \bar{x})$.

$(A \cap x, B \cap \bar{x}) \neq (\phi, \phi)$ car si $A \cap x = \phi$ alors $(A \subset \bar{x}) \Leftrightarrow (\exists C \in P(E) : C \neq \phi ; \bar{x} = A \cup C)$

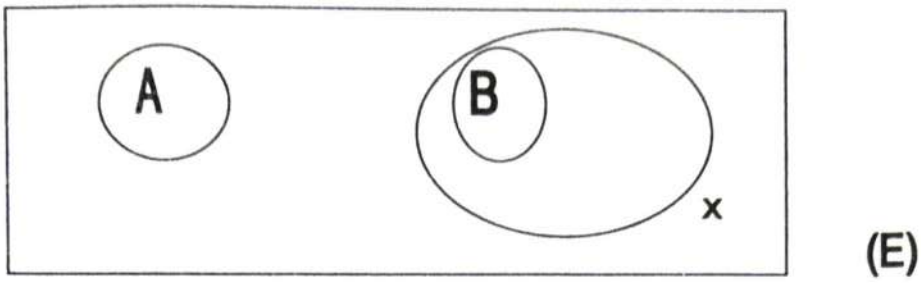
et $B \cap \bar{x} = B \cap (A \cup C) = (B \cap A) \cup (B \cap C) \neq \phi$ Car $B \cap A = A \cap B \neq \phi$ par hypothèse

et $(B \cap \bar{x} = \phi) \Leftrightarrow (B \subset X) \Leftrightarrow (\exists C' \in P(E) : C' \neq \phi$ et : $x = B \cup C')$

et $A \cap x = A \cap (B \cup C') = (A \cap B) \cup (A \cap C') \neq \phi$

Car $A \cap B \neq \phi$ par hypothèse

Finalement $A \cap B = \phi$ est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de solutions à $f(x) = \phi$



$A \cap X = \phi$, $B \cap \bar{x} = \phi$ et $f(x) = \phi \cup \phi = \phi$

Exercice:7

Soit E un ensemble non vide et $A \in P(E)$

On considère l'application : $f : P(E) \to P(E)$

$$X \to A \cap X$$

Et l'application : $g : P(E) \to P(E)$

$$X \to A \cup X$$

1. déterminer $f(P(E))$, $g(P(E))$

2. $f^{-1}(B)$, $g^{-1}(B)$ pour $B \in P(E)$

considérer les 3 cas $A = \phi$, $A = E$, $A \in P(E) - \{\phi, E\}$

Solution :

<u>1er cas :</u> $A = \phi$: $f : P(E) \to P(E)$

$$x \to \phi$$

$$g : P(E) \to P(E)$$

$$x \to x$$

1. $f(P(E)) = \{\phi\}$, $g(P(E)) = P(E)$

2.

$$f^{-1}(B) = \begin{cases} P(E) & \text{si } B = \phi \\ \phi & \text{si } B \neq \phi \end{cases}$$

$g^{-1}(B) = B$

$\underline{2^{eme}\text{ cas}}$: $A = E$

$f : P(E) \to P(E)$ $\qquad$ $g : P(E) \to P(E)$

$x \to x$ $\qquad$ $x \to E$

1. $f(P(E)) = P(E)$; $g(P(E)) = \{E\}$

$f^{-1}(B) = B$ $\qquad$ $g^{-1}(B) = \begin{cases} \phi & \text{si } B \neq E \\ P(E) & \text{si } B = E \end{cases}$

$\underline{3^{eme}\text{ cas}}$: $A \in P(E) - \{E, \phi\}$

$f : P(E) \to P(E)$ $\qquad$ $g : P(E) \to P(E)$

$x \to A \cap x$ $\qquad$ $x \to A \cup x$

$f(P(E)) = \operatorname{Im} f = \{Y \in P(E) : Y = A \cap x, x \in P(E)\}$

$A \cap x = Y \subset A$, $Y \in P(A)$

De plus pour tout $Y \in P(A)$ $(Y \subset A)$.

L'équation $A \cap x = Y$ admet comme solutions $X = Y \cup X'$ avec $X' \in P(E-A)$

En effet $A \cap (Y \cup X') = \underbrace{(A \cap Y)}_{Y} \cup \underbrace{(A \cap X')}_{\phi} = Y \cup \phi = Y$

Ce qui achève de prouver que $f(P(E)) = \operatorname{Im} f = P(A)$

- $f^{-1}(B) = \{x \in P(E) : A \cap x = B\}$

$(A \cap x = B) \Leftrightarrow (X = B \cup X')$ avec $X' \in P(E-A)$

Si $B \in P(A)$ et $f^{-1}(B) = \{B \cup X', X' \in P(E-A)\}$

si $B \notin P(A)$: $A \cap x = B$ est impossible

$f^{-1}(B) = \phi$

$g : P(E) : \forall x \in P(E), g(x) = A \cup x$

on a : $A \subset A \cup x$

d'autre part pour tout sur ensemble B de A l'équation $A \cup x = B$ admet comme solutions

$x = (B-A) \cup x'$ avec $x' \in P(A)$

donc $g(P(E)) = \{B \in P(E) : A \subset B\}$

$$g^{-1}(B) = \begin{cases} \phi \text{ si } A \not\subset B \\ \\ (B-A) \cup x' \text{ si } A \subset B,\ x' \in P(A) \end{cases}$$

➲ **remarque :**

pour $B = A$

$f^{-1}(A) = \{x \in P(E) : A \cap x = A\} = \{x \in P(E) : A \subseteq x\}$

$g^{-1}(A) = \{x \in P(E) : A \cup x = A\} = \{x \in P(E) : x \subseteq A\} = P(A)$

Exercice 8 :

Soit $f : E \to F$ une application et soient A, B deux parties non vides de E telles que : $f(A) \cap f(B) = \phi$

Montrer que si $f/_A$ et $f/_B$ sont injectives alors $f/_{A \cup B}$ l'est aussi.

Solution :

Pour montrer que $f/_{A \cup B}$ est injective il faut de prouver l'implication :

$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)$ pour $(x_1, x_2) \in (A \cup B)^2$.

Cette implication est en effet vraie car si $f(x_1) = f(x_2)$ avec $x_1 \neq x_2$, alors il existerait un élément y de $f(A \cup B)$ image de deux elements distincts.

Ces 2 éléments ne peuvent appartenir au meme ensemble (Aou B) Car $f/_A$ et $f/_B$ sont injectives.

Il ne reste donc que l'hypothèse que $x_1 \in A$ et $x_2 \in B$ (ou l'inverse).

Mais dans ce cas y appartiendrait à $f(A) \cap f(B) = \phi$ ce qui est absurde!!

Exercice 9 :

Soit $f : E \to F$ une application

I. soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $A \in \mathcal{P}(E)$

1. montrer que $f(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de $f(A)$

2. donner un exemple montrant que $\{(A_i)_{i\in I}\}$ est une partition de $A\in \mathcal{P}(E)$ et que $\{f(A_i)_{i\in I}\}$ n'est pas une partition de $f(A)$.

II. soit à présent $(B_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $B \in \mathcal{P}(F)$

1. montrer que $(f^{-1}(B_i))_{i\in I}$ est un recouvrement de $f^{-1}(B)$

2. montrer que si f est surjective et $\{(B_i)_{i\in I}\}$ une partition de B alors $\{(f^{-1}(B_i))_{i\in I}\}$ est une partition de $f^{-1}(B)$.

Solution :

rappelons que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de A ssi $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$

et que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de A ssi :

- $\forall i\in I : A_i \neq \phi$
- $\bigcup_{i\in I} A_i = A$
- $\forall\, i_1, i_2 \in I^2 : A_{i_1} \cap A_{i_2} = \phi$

ceci étant rappelé

I.

1. $(A \subset \bigcup_{i\in I} A_i) \Rightarrow (f(A) \subset f(\cup A_i))$ or $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$

donc $(A\subset \bigcup_{i\in I} A_i) \Rightarrow (f(A) \subset \bigcup_{i\in I} f(A_i))$

soit : $f(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de $f(A)$.

2. soit $f : N \to N$: $\quad f(1) = 0, f(2) = 4, f(3) = 4$

$n \to f(n)$

$A = \{1,2,3\}$.

$A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3\}$.

$\{A_1, A_2\}$ est une partition de A à 2 éléments. Car $A_1 \cup A_2 = A$, $A_1 \neq \phi$.

$A_1 \cap A_2 = \phi$, $A_2 \neq \phi$.

$f(A) = \{0,4\}$. On a $\quad f(A_1) \cup f(A_2) = f(A)$

$f(A_1) = \{0,4\} \qquad f(A_1) \neq \phi$

$f(A_2) = \{4\} \qquad f(A_2) \neq \phi$

mais $f(A_1) \cap f(A_2) = \{4\} \neq \phi$

$\{ f(A_1), f(A_2) \}$ n'est pas une partition de $f(A)$

II.

1.on a : $(B \subset \bigcup_{i\in I} B_i) \Rightarrow [f^{-1}(B) \subset (f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i)]$. ($(B_i)_{i\in I}$ recouvrement de B)

or $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

donc $f^{-1}(B) \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$

soit : $(f^{-1}(B_i))_{i\in I}$ est un recouvrement de $f^{-1}(B)$.

2. $(\{(B_i)_{i\in I}\}$ partition de B) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall i \in I : B_i \neq \phi \\ \bigcup_{i\in I} B_i = B \\ \forall i_1, i_2 \in I : B_{i_1} \cap B_{i_2} = \phi. \end{cases}$

- $(B_i \neq \phi) . \Leftrightarrow (f^{-1}(B_i) \neq \phi)$ car f est surjective.
- $(\bigcup_{i\in I} B_i = B) \Rightarrow (f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = f^{-1}(B)) \Leftrightarrow (\bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i) = f^{-1}(B))$.

  donc $\{f^{-1}(B_i)_{i\in I}\}$ partition de $f^{-1}(B)$
- $(B_{i1} \cap B_{i2} = \phi) \Rightarrow [(f^{-1}(B_{i1} \cap B_{i2}) = f^{-1}(\phi) = \phi = f^{-1}(B_{i1}) \cap f^{-1}(B_{i2})]$

➲ **remarque :**

si f n'était pas surjective on pourrait avoir $f^{-1}(B_i) = \phi$ pour un élément B_i de la partition de B.

considérons :

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$n \to 2n+1$$

soit $B = \{4,6,1,3\}$.

$f^{-1}(B) = \{0,1\}$, $B_1 = \{4,6\}$, $B_2 = \{1,3\}$.

$\{B_1, B_2\}$ est une partition de B à 2 éléments.

$f^{-1}(B_1) = \phi$

$f^{-1}(B_2) = \{0,1\}$.

$\{f^{-1}(B_1), f^{-1}(B_2)\}$ n'est pas une partition de $f^{-1}(B)$.

dans I. 2. si f était injective alors :

- $(A_i \neq \phi) \Rightarrow (f(A_i) \neq \phi)$ $(\forall f)$
- $(\bigcup_{i\in I} A_i = A) \Rightarrow (f(\bigcup_{i\in I} A_i) = f(A)) \Leftrightarrow (\bigcup_{i\in I} f(A_i) = f(A))$ (là aussi $\forall f$)
- $(A_{i_1} \cap A_{i_2} = \phi) \Rightarrow (f(A_{i_1}) \cap f(A_{i_2}) = \phi)$

car : si $y = f(x_1) = f(x_2)$ avec $x_1 \in A_{i1}$ et $x_2 \in A_{i2}$

alors $x_1 = x_2$ (car f est injective).

Et par conséquent $A_{i_1} \cap A_{i_2} \neq \phi$. (L'injectivité de f a joué son rôle .)

donc si $\{(A_i)_{i\in I}\}$ est une partition de A et f injective alors $\{f\ (A_i)_{i\in I}\}$ est une partition de $f(A)$.

CHAPITRE A SECTION 5

(10 Exercices, 29 Questions)

- Images et pré-images.
- Résolution de l'équation $f^{-1}[f(A)] = A$ où $f : E \to F$ et $A \subset E$

Exercice 1 :

Soit $f : E \to F$ une application.

Déterminer les parties A de E telles que : $f^{-1}(f(A)) = A$

Solution :

Remarquons d'abord que l'on a toujours : $A \subset f^{-1}[f(A)]$.

- Nous cherchons donc à déterminer les parties A de E vérifiant $f^{-1}[f(A)] \subset A$.

E et ϕ sont des solutions triviales au problème ($f^{-1}(f(E))=E$; $f^{-1}(f(\phi))=\phi$).

- Cherchons les parties propres non vides A de E vérifiant $f^{-1}[f(A)] \subset A$.(*)

Supposons (*) vérifiée, alors :

on a : $(x \notin A) \Rightarrow (x \notin f^{-1}(f(A)) \Leftrightarrow (f(x) \notin f(A))$

Donc : $(*) \Rightarrow [(x \notin A) \Rightarrow (f(x) \notin f(A))]$

Réciproquement: Supposons que $[x \notin A \Rightarrow f(x) \notin f(A)]$ et montrons que $f^{-1}[f(A)] \subset A$.

En effet soit $x \in f^{-1}[f(A)]$ Alors $f(x) \in f(A)$

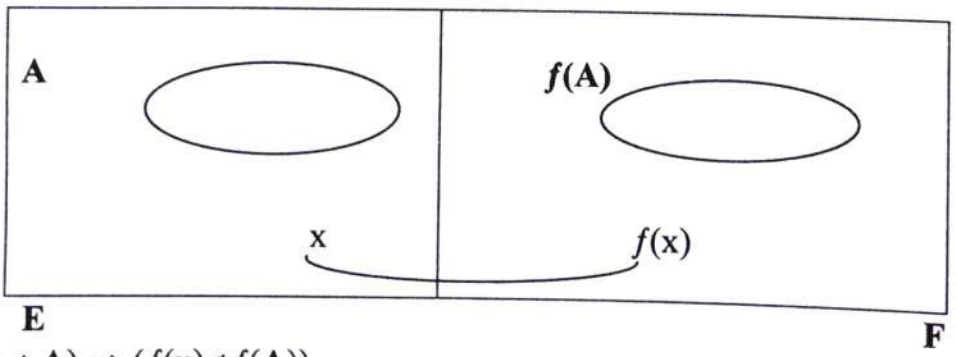
$(f(x) \in f(A)) \Rightarrow (x \in A)$ (car si $x \notin A$ alors $f(x) \notin f(A)$)

D'où $f^{-1}(f(A)) \subset A$

Finalement on a l'équivalence logique : $(f^{-1}[f(A)] \subset A) \Leftrightarrow [x \notin A \Rightarrow f(x) \notin f(A)]$

Ce qui peut s'écrire aussi : $f^{-1}(f(A)) \subset A) \Leftrightarrow (f(C_E A) \subset C_F f(A))$

Les ensembles A Cherchés sont des parties A de E telles que pour tout élément x n'appartenant pas à A Son image $f(x)$ n'appartient pas à $f(A)$.



$(x \notin A) \Rightarrow (f(x) \notin f(A))$

➲ **remarque :**

pour f:E→F Injective , toutes les parties de E vérifient la condition énoncée plus haut : car les éléments de A Sont les uniques antécédants des éléments de f(A) et que tout élément en dehors de A admet une image en dehors de f(A).

Nous donnons à présent trois types de parties A de E vérifiant $f^{-1}[f(A)] \subset A$.

exercice 2 : 1er type

soit f:E→F une application et soit

$$A=\{x\in E : \{x\}= f^{-1}\{y\} ; y\in \mathrm{Im}f\}$$

Montrer que $f^{-1}(f(A))\subset A$

Solution :

L'ensemble A est constitué des antécédants uniques x d'éléments y de Imf .

- A vérifie $f(C_E A) \subset C_F(f(A))$, $[\forall x \notin A ; f(x)\notin f(A)]$

car si pour $x\notin A$: $f(x)=y \in f(A)$ alors y aurait deux antécédants l'un $x\notin A$ et l'autre $x'\in A$

➲ **remarque :** (autre démonstration)

A peut être vide ($A=\phi$) c'est à dire que tout élément de Imf admet plus qu'un antécédent dans E .

i.e : l'équation $f(x)=y$ avec $y \in \mathrm{Im}f$ admet au moins deux (02) solutions dans E .

dans ce cas : $f^{-1}(f(A))= f^{-1}(f(\phi))=f^{-1}(\phi)\subset\phi$

si $A\neq\phi$: $(x\in f^{-1}(f(A)))\Leftrightarrow (f(x)\in f(A))$

$(f(x)\in f(A))\Leftrightarrow (\exists x'\in A, \exists y\in F : y= f(x)= f(x'))$

$(y= f(x)) \Leftrightarrow (x\in f^{-1}\{y\}=\{x'\})$ (x antécédant unique de $y\in \mathrm{Im}f$)

donc $(\{x\}=\{x'\})\Leftrightarrow(x =x'\in A)$

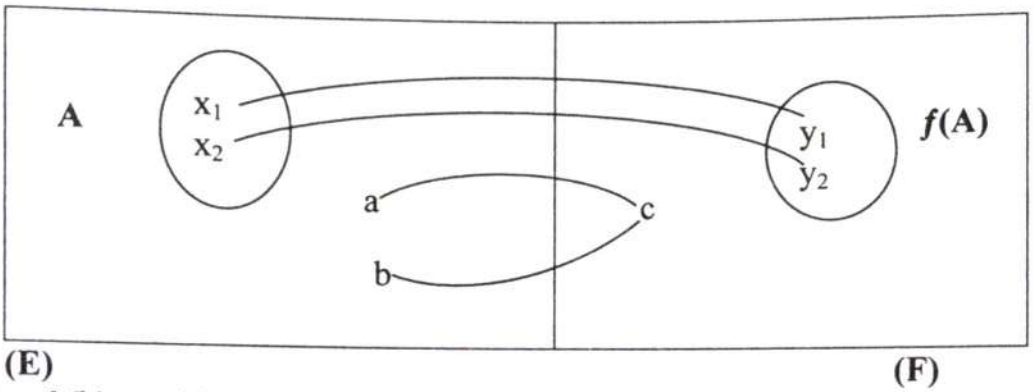
D'ou: $f^{-1}(f(A))\subset A$

➲ **remarques :**

Si f est injective alors $\forall y \in \mathrm{Im} f\ \exists! x \in E : f(x)=y$

Donc $\forall A \subset E$, $f^{-1}(f(A)) \subset A$

- La condition d'existence dans A « d'antécédants uniques » d'éléments de Imf est plus faible que f injective.
- f pourrait être non injective et il existerait des éléments y de Imf à antécédant unique comme le montre le schéma qui suit :



$f(a) = f(b) = c$ (f non injective)

x_1 est l'unique antécédant de y_1

x_2 est l'unique antécédant de y_2

Toutefois : f/A est injective

- f/A injective n'entraîne pas que les l'éléments de A sont des « antécédants uniques » d'éléments de Imf , comme le montre l'exemple suivant :

Considérons : E={a, b, a' ,b'} ; F ={c,d}.

Et : $f : E \rightarrow F$ telle que

$f(a) = f(a') = c$; $f(b) = f(b') = d$.

On a : $f^{-1}(\{c\})=\{a,a'\}$

$f^{-1}(\{d\}) = \{b,b'\}$

soit A={a,b} $f(a) \neq f(b)$ $f|A$ injective

a et b ne sont pas les seuls antécédants de c et d respectivement .

.si A est un ensemble à « antécédants uniques » d'éléments de Imf , alors toute partie $B \neq \phi$ de A l'est aussi donc $f^{-1}(f(B)) \subset B$.

Exercice 3 : 2ème type

Soient f :E→F une application et $y_0 \in F$.

Montrer que $A = f^{-1}\{y_0\}$ vérifie : $f^{-1}(f(A)) \subset A$.

Solution :

Remarquons que A est constitué de tous les Antécédants de y_0 :

c'est à dire des x deE: $f(x)=y_0$.

- A pourrait être vide [$f(x)=y_0$ impossible dans E)

et l'on a: $f^{-1}(f(\phi))= f^{-1}(\phi)=\phi \subset \phi$.

- A vérifie $f(C_E A) \subset C_F f(A)$.

car si $x \notin A$,son image $y = f(x) \notin f(A)=\{y_0\}$ par définition de A Comme ensemble de tous les antécédants de y_0.

Ceci étant ,on peut faire le raisonnement suivant : $[x \in f^{-1}(f(A)] \Leftrightarrow [f(x) \in f(A)=\{y_0\}]$

$f(x)=y_0 \Leftrightarrow x \in A$

donc : $f^{-1}(f(A)) \subset A$

➲ **remarque1 :**

on rappelle que : $f^{-1}(f(A)) \subset A$ équivaut à $f^{-1}(f(A))=A$ car l'on a toujours $A \subset f^{-1}(f(A))$

➲ b **remarque2 :**

si f:E→F injective et $y_0 \in F$, Les solutions à $f^{-1}\{y_0\}$ sont :

Soit ϕ ($y_0 \notin \mathrm{Im} f$) ou $\{x_0\}$:$x_0 \in (y_0 \in \mathrm{Im} f$, $f(x_0)=y_0)$ $\{x_0\}$ vérifie $f^{-1}(f(\{x_0\})=\{x_0\}$

Au cas ou f est non injective :on peut trouver des singletons $\{x\}$ tels que $f^{-1}[f\{x\}] \not\subset \{x\}$

En effet considérons : f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \to x^2$$

f n'est ni injective ni surjective

on a : $f(1)=1$, $f\{1\}=\{1\}$

$f^{-1}[f\{1\}]= f^{-1}\{1\}=\{-1,1\}$

et $\{-1,1\} \not\subset \{1\}$

(ici le singleton $\{x\}=\{1\}$)

un troisième type de parties de A vérifiant $f^{-1}(f(A))=A$

Exercice 4 :

soient f :E→F une application et A∈ P (E)

Montrer que $f^{-1}(f[f^{-1}(f(A))]) = f^{-1}(f(A))$.

Solution :

Remarquons qu'on a toujours : $f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(f[f^{-1}(f(A))])$

montrons que : $f^{-1}(f[f^{-1}(f(A))]) \subset f^{-1}(f(A))$.

soit $x \in f^{-1}(f[f^{-1}(f(A))])$ alors $[f(x) \in f[f^{-1}(f(A))] \Leftrightarrow [\exists x' \in f^{-1}(f(A)) : f(x')=f(x)]$

$[x' \in f^{-1}(f(A))] \Leftrightarrow [f(x') \in f(A)]$

$[f(x) = f(x')$ et $f(x') \in f(A)] \Rightarrow [f(x) \in f(A)]$

$[f(x) \in f(A)] \Leftrightarrow (x \in f^{-1}[f(A)])$

donc $f^{-1}(f[f^{-1}(f(A))]) \subset f^{-1}(f(A))$.

Finalement on a : $\forall A \in P(E)$ $f^{-1}(f[f^{-1}(f(A))]) = f^{-1}(f(A))$.

Exercice 5 :

soit f : E→F une application et soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E

Telles que : $\forall i \in I\ \exists y_i : \in \mathrm{Im} f : f^{-1}\{y_i\}=A_i$

Montrer que $f^{-1}f(A_i)= \bigcup_{i\in I} A_i$

Solution :

$\forall i \in I$, A_i est l'ensemble de tous les antécédants de y :

Donc $f^{-1}(f(A_i))=A_i$ (voir exercice 3)

Nous avons $f^{-1}(f(\bigcup_{i\in I} A_i)) = f^{-1}[\bigcup_{i\in I} f(A_i)] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[f(A_i)] = \bigcup_{i\in I} A_i$

Donc $f^{-1}(f(\bigcup_{i\in I} A_i)) = \bigcup_{i\in I} A_i$

➲ commentaire :

dans ce qui suit nous allons donner une autre démonstration à :

Si f :E→F injective alors : $\forall A \subset E$, $f^{-1}(f(A))=A$

Preuve : $\forall x \in E$, si f est injective

$f(x)= f(a) \Leftrightarrow x = a \Leftrightarrow f^{-1}[f\{a\}] = \{a\}$

on a : $\forall A \in E : A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$

$f^{-1}(f(A)) = f^{-1}[f(\bigcup_{a \in A} \{a\})] = \bigcup_{a \in A} f^{-1}[f(\{a\})] = \bigcup_{a \in A} \{a\} = A$

Donc : $f^{-1}(f(A)) = A$ pour f injective et $A \subset E$

Dans ce qui suit nous donnons quelques exercices mettant en évidence des sous ensembles de R à « antécédants uniques » c'est à dire du 1er type (exercice 2) et des sous ensembles de R à « antécédants d'un élément y de Imf » c'est à dire du 2eme type (exercice3) toutes ces parties A de R vérifient : $f^{-1}(f(A)) = A$

Exercice 6 :

Soient $(\alpha,\beta) \in R^2 : \alpha \neq \beta$ et $p \in N^*$ et $f : R \to R$

$$x \to \begin{cases} \alpha \text{ si } x \in pZ \\ \beta \text{ si } x \in (R - pZ) \end{cases}$$

1. Déterminer Imf , $f^{-1}(\{\alpha\})$; $f^{-1}(\{\beta\})$.

2. Calculer $f^{-1}(f\{ pZ \})$; $f^{-1}(f(R - pZ))$.

Solution :

1. $f^{-1}(\{\alpha\}) = pZ$; $f^{-1}(\{\beta\}) = (R - pZ)$; Im$f = \{\alpha, \beta\}$

2.

- $(f(pZ) = \{ \alpha\}) \Rightarrow (f^{-1}(f(pZ)) = f^{-1}\{\alpha\} = pZ)$

$f^{-1}(f(pZ)) = f^{-1}\{\alpha\} = pZ$

- $(f(R - pZ) = \{ \beta\}) \Rightarrow (f^{-1}[f(R - pZ)] = f^{-1}(\beta) = (R - pZ))$

$f^{-1}[f(R - pZ)] = R - pZ$

➲ **remarque :**

Les éléments de pZ et (R - pZ) sont les antécédents de α et β respectivement.

Exercice 7 :

soit $f : R^+ \to R$

$x \to [x]$ où $[x]$ est la partie entière de x .

soit $n \in N$.

1. déterminer $\mathrm{Im} f$: $f^{-1}(\{n\})$

2. calculer f^{-1} $[f([n,n+1[\ )]$

Solution :

1. $\mathrm{Im} f = N$; $f^{-1}(\{n\})=[n,n+1[$ (on a : $\forall\ n \in N : \exists x \in R^+ : [x]=n$)

2. $f([n,n+1[\ )= \{n\}$ donc : $f^{-1}\ (f([n,n+1[)) = f^{-1}(\{n\})\ [n,n+1[$

remarque :

l'ensemble $[n,n+1[$ est encore un sous ensemble de R^+ (donc de R) de type 2 (exercice 3) (ensemble des antécédants de n).

exercice 8 :

soit $f : R - \{-1,-2\} \to R$

$x \to x^2 + 1$

1. déterminer $\mathrm{Im} f$; $f^{-1}\ (\ ]4,+\infty[)$

2. calculer $f^{-1}(\{2\})$: $f^{-1}(\{5\})$; $f^{-1}(\{2,5\})$: $f^{-1}(\{1\})$

3. calculer $f^{-1}[f(\{1,2\})]$: $f^{-1}[f(\{0\})]$, $f^{-1}\ [f(\{1\})]$; $f^{-1}[f(\{2\})]$.

Solution :

1. $\mathrm{Im} f = \{\ y \in R : \exists x \in R - \{-1,-2\} : y = x^2+1\} = [1,+\infty[$

car $\forall y \geq 1$ l'equation $x^2+1=y$ admet au moins une solution dans $R - \{-1,-2\}$

explicitons :

$(y = x^2+1) \Leftrightarrow (x^2 + (1-y) = 0) \Leftrightarrow (x^2 = (y-1) \geq 0)$ (car $y \geq 1$) $\Leftrightarrow (\ |x| = \sqrt{y-1}\ )$

cette équation admet deux solutions symétriques pour $y \neq 2$ et $y \neq 5$ dans $R - \{-1,-2\}$.

Pour ces deux valeurs $y-1 \in \{1,4\}$ et $\sqrt{y-1} \in \{1,2\}$.

L'equation admet donc les solutions uniques x = 1 et x = 2.

- $f^{-1}(]4,+\infty[)=\{x\in R-\{-1,-2\} : x^2+1>4\}$

$x^2+1>4 \Leftrightarrow x^2-3>0$ ....(*)

La solution dans R - {-1,-2} est : $x\in]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},+\infty[-\{-2\}$

donc : $f^{-1}(]4,+\infty[) =]-\infty,-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3},+\infty[-\{-2\}$

2.

$f^{-1}(\{2\})=\{x\in R-\{-1,-2\} : x^2+1=2\}=\{1\}$

$f^{-1}(\{5\})=\{x\in R-\{-1,-2\} : x^2+1=5\}=\{2\}$

$f^{-1}(\{2,5\})=\{x\in R-\{-1,-2\} : x^2+1\in \{2,5\}=\{1,2\}$

$f^{-1}(\{1\})=\{x\in R-\{-1,-2\} : x^2+1=1\}=\{0\}$

3.

$f^{-1}[f\{1,2\}]= f^{-1}(\{2,5\})=\{1,2\}$ $(f(1)=2, f(2)=5)$

$f^{-1}[f\{0\}]= f^{-1}(\{1\})=\{0\}$ $(f(0)=1)$

$f^{-1}[f\{1\}]= f^{-1}\{2\}=\{1\}$.

$f^{-1}[f(\{2\})]= f^{-1}\{5\}=\{2\}$.

➲ commentaire :

Les sous ensembles {1},{2},{0} et {1,2} de R -{-1,-2} sont tous des sous ensembles à « Antécédants uniques » i,e du type 1 (exercice 2)

Les sous ensembles {0,1}, {0,2}, {0,1,2} le sont aussi. Tous les sous ensembles de R {-1,-2} qui restent ne sont pas du type 1 car l'équation $x^2+1 = y$, pour : $y\in]1,+\infty[-\{5,2\}$ admet toujours 2 solutions opposées et que pour $y\in]-\infty,1[$ L'equation $x^2+1= y$ est impossible : $(f^{-1}\{y\}=\phi)$

Dans l'exercice qui suit , nous mettons en évidence la structure d'algèbre de boole de parties d'un ensemble E nous rappelons qu'une algèbre de boole de parties d'un ensemble E. est une partie $\mathcal{A}$ de P (E) vérifiant :

1. $E \in \mathcal{A}$

2. $\forall (A,B)\ A \in \mathcal{A}^2 \quad A \Delta B \in \mathcal{A}$

3. $\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2 \quad A \cap B \in \mathcal{A}$

Exercice 9 :

soient f: E $\rightarrow$F une application et $\mathcal{A} = \{A \subset E : f^{-1}[f(A)]=A\}$.

1. Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{A}$ indexée par I Démontrer que : $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

2. Soit $A' \in P(E) : A \cap A' = \phi$ et $A \in A$. Montrer alors que : $A \cap f^{-1}(f(A'))= \phi$

3. prouver que $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Démontrer que : $\forall (A_1,A_2) \in \mathcal{A}^2$:

a. $(A_1-A_2) \in \mathcal{A}$

b. $A_1 \Delta A_2 \in \mathcal{A}$

cas particulier : Pour I={1,2}on obtient : $\forall (A_1,A_2) \in \mathcal{A}^2 : A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$;

$A_1-A_2 \in A$ et $A_1 \Delta A_2 \in A$

Ce qui donne à $\mathcal{A}$ une structure d'algèbre de boole de parties de E.

Solution :

1. $(\forall i \in I\ A_i \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}.)$

On a : $f^{-1}(f(\bigcup_{i\in I} A_i)) = f^{-1}[\bigcup_{i\in I} f(A_i)] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[f(A_i)] = \bigcup_{i\in I} A_i$

Donc $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

2. Soient $A \in \mathcal{A}$ et $A' \in P(E) : A' \cap A = \phi$

Montrons que $A \cap f^{-1}[f(A)] = \phi$

Nous avons $A \in A \Leftrightarrow f^{-1}[f(A)]=A$

Montrons que $[\forall x \in A, x \notin f^{-1}[f(A)]] \Leftrightarrow [\forall x \in A, f(x) \notin f(A')]$

$[\forall x \in A, f(x) \notin f(A')] \Leftrightarrow [\forall x \in A, \forall x' \in A'\ f(x) \neq f(x')]$

soit maintenant $x' \in A'$ alors $x' \notin A$ car $A \cap A' = \phi$

comme $f^{-1}[f(A)]=A$ alors $f(x') \notin f(A)$

$(f(x') \notin f(A)) \Leftrightarrow (\forall x \in A : f(x') \neq f(x))$

donc $\forall x \in A$, $\forall x' \in A'$: $f(x) \neq f(x')$ et $A \cap f^{-1}[f(A')]= \phi$

3. montrons d'abord que si $A \in \mathcal{A}$ Alors $C_E A \in \mathcal{A}$

en effet, on a $A \cap C_E A = \phi$ et $A \cup C_E A=E$

$f^{-1}[f(A \cup C_E A)]= f^{-1}[f(E)] =E$

$f^{-1}[f(A) \cup f(C_E A)] = f^{-1}(f(A)] \cup f^{-1}(f(C_E A)]$ et $A \cap f^{-1}(f(C_E A))= \phi$ (voir 2)

on a donc : $A \cap f^{-1}[f(C_E A)]= \phi$ et $A \cup f^{-1}(f(C_E A)]=E$, Car[$(f^{-1}(f(A)]=A \Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$]

Donc : $f^{-1}[f(C_E A)]=C_E A$

Car : l'application : $P(E) \rightarrow P(E)$ est bijective

$X \rightarrow C_E X$

montrons à présent que si $\forall i \in I$ $A_i \in A$ alors $\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$

$(A_i \in \mathcal{A}) \Rightarrow (C_E A_i \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcup_{i \in I} C_E A_i \in \mathcal{A})$

$(\bigcup_{i \in I} C_E A_i \in \mathcal{A}) \Leftrightarrow (C_E(\bigcap_{i \in I} A_i) \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A})$

Car $\bigcap_{i \in I} A_i = C_E[C_E(\bigcap_{i \in I} A_i)]$

4. pour $I=\{1,2\}$; $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$

$A_1 \cup A_2 \in \mathcal{A}$ pour $(A_1,A_2) \in \mathcal{A}^2$

a) $(A_1 \in \mathcal{A}, A_2 \in \mathcal{A}) \Rightarrow (A_1 \in \mathcal{A}$ et $C_E A_2 \in \mathcal{A})$

$(A_1 \cap C_E A_2 \in \mathcal{A}) \Leftrightarrow (A_1 - A_2 \in \mathcal{A})$

b) $A_1 \Delta A_2 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_1) \in \mathcal{A}$

Comme union de 2 éléments de $\mathcal{A}$.

Exercice 10 :

soient $f : E \rightarrow F$ une application et $A \subset E, B \subset F$.

Montrer que : $f[A \cap f^{-1}(B)] = f(A) \cap B$

Solution :

Montrons premièrement que : $f\,[A\cap f^{-1}(B)] \subset f\,(A) \cap B$; soit $y \in f\,[A\cap f^{-1}(B)]$

$[\, y \in f\,[A\cap f^{-1}(B)]\,] \Leftrightarrow [\exists\, x\in A \cap f^{-1}(B) : y = f\,(x)]$

$(y = f\,(x) \text{et } x\in A\,) \Leftrightarrow (y\in f\,(A))$

$(y= f\,(x) \text{et } x\in f^{-1}(B)) \Rightarrow (y\in B)$

Donc $y\in f\,(A) \cap B$

D'où : $f\,[A\cap f^{-1}(B)] \subset f\,(A) \cap B \qquad (1)$

Montrons à présent que : $f\,(A) \cap B \subset f\,[A\cap f^{-1}(B)]$

Soit $y\in f\,(A) \cap B$ alors $y \in f\,(A)$ et $y\in B$.

$[y\in f\,(A)] \Leftrightarrow [\exists\, x\in A\,,\, y= f\,(x)]$

$[y\in B \text{ et } y = f\,(x)] \Leftrightarrow [x\in f^{-1}(B)]$.

y est donc l'image d'un élément x de $[A\cap f^{-1}(B)]$

donc $y \in f\,[A\cap f^{-1}(B)]$

d'où : $f\,(A) \cap B \subset f\,[\,A\cap f^{-1}(B)] \qquad (2)$

$[(1) \text{ et } (2)] \Leftrightarrow (f\,(A) \cap B = f\,[A\cap f^{-1}(B)])$

CHAPITRE R SECTION I

Définition ensembliste d'une relation composition de relations Propriétés générales.

(13 Exercices, 41 Questions)

Exercice 1 :

On considere la relation $\mathcal{R}$ définie sur N Par :

$\mathcal{R} = \{(4,5), (1,4); (4,6); (7,6); (3,7)\}$.

Déterminer :

1. Le domaine de $\mathcal{R}$

2. L'Image de $\mathcal{R}$

3. La relation $\mathcal{R}^{-1}$

4. $\mathcal{R}.\ \mathcal{R}$

5. $\mathcal{R}.\ \mathcal{R}^{-1}$

Solution :

1. Le dommaine $D_{\mathcal{R}}$ de la relation $\mathcal{R}$ est défini par:

$D_{\mathcal{R}} = \{ a: (a,b) \in \mathcal{R} \}$.

$D_{\mathcal{R}} = \{ 4,1,7,3 \}$.

2. L'image $I_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{R}$ est définie par:

$I_{\mathcal{R}} = \{ b: (a,b) \in \mathcal{R} \}$.

$I_{\mathcal{R}} = \{ 5,4,6,7 \}$.

3. La relation $\mathcal{R}^{-1}$ est telle que: $D_{\mathcal{R}} = I_{\mathcal{R}^{-1}}$ et $I_{\mathcal{R}} = D_{\mathcal{R}^{-1}}$

$\mathcal{R}^{-1} = \{(5,4), (4,1),(6,4),(6,7),(7,3)\}$

$(a\ \mathcal{R}\ b) \Leftrightarrow (b\ \mathcal{R}^{-1} a)$ ou $((a,b) \in \mathcal{R}) \Leftrightarrow ((b,a) \in \mathcal{R}^{-1})$

4. $((a,b) \in \mathcal{R}.\ \mathcal{R}) \Leftrightarrow (\exists\, c : (a,c) \in \mathcal{R}$ et $(c,b) \in \mathcal{R})$

$$\left.\begin{array}{l} \text{on a } (1,4) \in \mathcal{R} \\ \qquad (4,5) \in \mathcal{R} \end{array}\right\} \Rightarrow (1,5) \in \mathcal{R}.\ \mathcal{R}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{on a } (1,4) \in \mathcal{R} \\ \qquad (4,6) \in \mathcal{R} \end{array}\right\} \Rightarrow (1,6) \in \mathcal{R}.\ \mathcal{R}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{on a } (3,7) \in \mathbb{R} \\ \qquad (7,6) \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow (3,6) \in \mathbb{R}.\mathbb{R}$$

Donc : $\mathbb{R}.\mathbb{R} = \{ (1,5), (1,6), (3,6)$

5. $((a,b) \in \mathbb{R}^{-1}.\mathbb{R}) \Leftrightarrow (\exists c : (a,c) \in \mathbb{R} \text{ et } (c,b) \in \mathbb{R}^{-1})$

$$\left.\begin{array}{l}\text{on a } (4,5) \in \mathbb{R} \\ \qquad (5,4) \in \mathbb{R}^{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow (4,4) \in \mathbb{R}^{-1}.\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l}(1,4) \in \mathbb{R} \\ (4,1) \in \mathbb{R}^{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow (1,1) \in \mathbb{R}^{-1}.\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l}(4,6) \in \mathbb{R} \\ (6,4) \in \mathbb{R}^{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow (4,4) \in \mathbb{R}^{-1}.\mathbb{R}$$

(Confirmation du premier résultat).

$$\left.\begin{array}{l}(4,6) \in \mathbb{R} \\ (6,7) \in \mathbb{R}^{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow (4,7) \in \mathbb{R}^{1}.\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l}(7,6) \in \mathbb{R} \\ (6,7) \in \mathbb{R}^{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow (7,7) \in \mathbb{R}^{1}.\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l}(7,6) \in \mathbb{R} \\ (6,4) \in \mathbb{R}^{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow (7,4) \in \mathbb{R}^{-1}.\mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{l}(3,7) \in \mathbb{R} \\ (7,3) \in \mathbb{R}^{-1}\end{array}\right\} \Rightarrow (3,3) \in \mathbb{R}^{-1}.\mathbb{R}$$

Donc : $\mathbb{R}^{-1}.\mathbb{R} = \{ (4,4), (1,1), (4,7), (7,7), (7,4), (3,3) \}$

Exercice 2 :

Soient dans R les relations :

$\mathcal{R}_1 = \{ (x,y) \in R^2 : x^2 + 2y = 5 \}$

$\mathcal{R}_2 = \{ (x,y) \in R^2 : 2x - y = 3 \}$

1. déterminer $\mathcal{R}_1 . \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_2 . \mathcal{R}_1$

2. Comparer

Solution :

Détermination de $\mathcal{R}_1 . \mathcal{R}_2$:

$(x \mathcal{R}_1 . \mathcal{R}_2\ y) \Leftrightarrow [\ \exists z \in R : x \mathcal{R}_2 z$ et $z \mathcal{R}_1 y\ ]$.

$(x \mathcal{R}_1 . \mathcal{R}_2\ y) \Leftrightarrow [\ \exists z \in R : 2x-z = 3$ et $z^2 + 2y = 5\ ]$.

$(x \mathcal{R}_1 . \mathcal{R}_2\ y) \Leftrightarrow [\ \exists z \in R : z = (2x-3)$ et $z^2 + 2y = 5\ ]$.

$(x \mathcal{R}_1 . \mathcal{R}_2\ y) \Leftrightarrow [\ \exists z \in R : x = \frac{z+3}{2}$ et $y = \frac{5-z^2}{2}\ ]$.

$\mathcal{R}_1 . \mathcal{R}_2 = \{ (x,y) \in R^2 : x = \frac{z+3}{2}$ et $y = \frac{5-z^2}{2} / z \in R \}$.

➲ **remarque** :

x et y vérifient : $(2x - 3)^2 + 2y = 5$

Détermination de $\mathcal{R}_2 . \mathcal{R}_1$

$(x . \mathcal{R}_2 . \mathcal{R}_1 y) \Leftrightarrow [\ \exists z \in R : x \mathcal{R}_1 z$ et $z \mathcal{R}_2 y\ ]$

$(x . \mathcal{R}_2 . \mathcal{R}_1 y) \Leftrightarrow [\ \exists z \in R : x^2 + 2z = 5$ et $2z - y = 3\ ]$

$(x . \mathcal{R}_2 . \mathcal{R}_1 y) \Leftrightarrow [\ \exists z \in R : 2z = 5 - x^2 = y + 3\ ]$

$(x . \mathcal{R}_2 . \mathcal{R}_1 y) \Leftrightarrow [\ \exists z \in R : x^2 = 5 - 2z$ et $y = 2z - 3\ ]$

$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 5-2z \geq 0 \Leftrightarrow z \leq 5/2 \Leftrightarrow z \in [-\infty, 5/2\ ]$.

$\mathcal{R}_2 . \mathcal{R}_1 = \{(x,y) \in R^2 : x = \sqrt{5-2z}$ et $y = 2z - 3 / z \in [-\infty, 5/2]\}$

donc pour $z = 5/2$; $x = 0$, $y = 2$

On a $0 \mathcal{R}_1 5/2$ car $0^2 + (2 \times 5/2) = 5$ et $5/2 \mathcal{R}_2 2$ car $(2 \times 5/2) - 2 = 5 - 2 = 3$

➲ **remarque** :

x et y vérifient : $x^2 + y = 2$

$(y = 2z - 3$ et $z \leq 5/2) \Rightarrow y \leq 2$

il est clair que $\mathcal{R}_1 . \mathcal{R}_2 \neq \mathcal{R}_1 . \mathcal{R}_2$

Exercice 3 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur A

Montrer les trois propositions suivantes :

1. ($\mathcal{R}$ Symétrique) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$)

2. ($\mathcal{R}$ Transitive) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}. \mathcal{R} \subset \mathcal{R}$).

3. ($\mathcal{R}$ Transitive) $\Rightarrow$ ($\mathcal{R}. \mathcal{R}$ Transitive).

Solution :

1.

Montrons d'abord que : ($\mathcal{R}$ Symétrique) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^{-1}$)

Montrons que : ($\mathcal{R}$ Symétrique) $\Rightarrow$ ($\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^{-1}$)

Soit $(a,b) \in \mathcal{R}$: $((a,b) \in \mathcal{R}) \Rightarrow ((b,a) \in \mathcal{R})$ car $\mathcal{R}$ est symétrique, $((b,a) \in \mathcal{R}) \Rightarrow ((a,b) \in \mathcal{R}^{-1})$

Donc : $((a,b) \in \mathcal{R}) \Rightarrow ((a,b) \in \mathcal{R}^{-1})$

et : $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}^{-1}$ (1)

Montrons a présent que : ($\mathcal{R}$ symétrique) $\Rightarrow$ ($\mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{R}$)

Soient $(c,d) \in \mathcal{R}^{-1}$: $((c,d) \in \mathcal{R}^{-1}) \Leftrightarrow ((d,c) \in \mathcal{R}) \Rightarrow ((c,d) \in \mathcal{R})$ car $\mathcal{R}$ est symétrique.

Donc : $\mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{R}$ (2)

$\mathcal{R}$ Symétrique $\Rightarrow \mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$

Montrons maintenant que : ($\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$) $\Rightarrow$ ($\mathcal{R}$ Symétrique) pour cela soit :

$((a,b) \in \mathcal{R}) \Leftrightarrow ((b,a) \in \mathcal{R}^{-1})$ car $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$.

Mais $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1} \Leftrightarrow (b,a) \in \mathcal{R}$ donc : $[(a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow (b,a) \in \mathcal{R}] \Leftrightarrow \mathcal{R}$ Symétrique

Finalement : $\boxed{(\mathcal{R} \text{ Symétrique}) \Leftrightarrow (\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1})}$

2.

Montrons l'équivalence : ($\mathcal{R}$ Transitive) $\Leftrightarrow$($\mathcal{R}.\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$)

- ($\mathcal{R}$ Transitive) $\Rightarrow$ ($\mathcal{R}.\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$)

$((a,b) \in \mathcal{R}.\mathcal{R}) \Leftrightarrow (\exists\, c \in A : (a,c) \in \mathcal{R}$ et $(c,b) \in \mathcal{R})$

$((a,b) \in \mathcal{R}$ et $(c,b) \in \mathcal{R}) \Rightarrow ((a,b) \in \mathcal{R})$ car $\mathcal{R}$ est Transitive.

Donc : $((a,b) \in \mathcal{R}.\mathcal{R}) \Rightarrow ((a,b) \in \mathcal{R})$ et [$\mathcal{R}$ Transitive] $\Rightarrow$ [$\mathcal{R}.\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$].

- ($\mathcal{R}.\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$) $\Rightarrow$ ($\mathcal{R}$ Transitive)

Soient $a,b,c \in A$: $(a,b) \in \mathcal{R}$ et $(b,c) \in \mathcal{R}$.

Alors, puisque $\mathcal{R}.\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$, $(a,c) \in \mathcal{R}$ et $\mathcal{R}$ est Transitive

Finalement : $\boxed{(\mathcal{R} \text{ Transitive}) \Leftrightarrow (\mathcal{R}.\mathcal{R} \subset \mathcal{R})}$

3. ($\mathcal{R}$ Transitive) $\Rightarrow$($\mathcal{R}.\mathcal{R}$ Transitive)

Soient $a,b,c \in A$: $(a,b) \in \mathcal{R}.\mathcal{R}$ et $(b,c) \in \mathcal{R}.\mathcal{R}$

$\exists(\alpha,\beta) \in A^2$: $(a,\alpha) \in \mathcal{R}$ et $(\alpha,b) \in \mathcal{R}$ et $(b,\beta) \in \mathcal{R}$ et $(\beta,c) \in \mathcal{R}$:

$((a,\alpha) \in \mathcal{R}$ et $(\alpha,b) \in \mathcal{R}) \Rightarrow ((a,b) \in \mathcal{R})$ car $\mathcal{R}$ est Transitive.

$((b,\beta) \in \mathcal{R}$ et $(\beta,c) \in \mathcal{R}) \Rightarrow ((b,c) \in \mathcal{R})$ car $\mathcal{R}$ est Transitive.

On a donc : [(a $\mathcal{R}$ b) et (b $\mathcal{R}$ c)] $\Leftrightarrow$ [a $\mathcal{R}.\mathcal{R}$ c] $\Leftrightarrow$ [$(a,c) \in \mathcal{R}.\mathcal{R}$]

On a obtenu [$(a,b) \in \mathcal{R}.\mathcal{R}$ et $(b,c) \in \mathcal{R}.\mathcal{R}$] $\Rightarrow$ [$(a,c) \in \mathcal{R}.\mathcal{R}$]

Donc : $\boxed{(\mathcal{R} \text{ Transitive}) \Rightarrow (\mathcal{R}.\mathcal{R} \text{ Transitive})}$

Exercice 4 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur A démontrer les propositions suivantes:

1. ($\mathcal{R}$ Réflexive) $\Leftrightarrow$ ($DA^2 \subset \mathcal{R}$)

2. ($\mathcal{R}$ Réflexive) $\Rightarrow$ ($\mathcal{R} \subset \mathcal{R}.\mathcal{R}$)

3. ($\mathcal{R}$ Réflexive) $\Rightarrow$ ($\mathcal{R}.\mathcal{R}$ Réflexive).

4. $\left.\begin{array}{l} \mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}'_1 \\ \mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}'_2 \end{array}\right\} \Rightarrow (\mathcal{R}.\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}'_1.\mathcal{R}'_2)$

DA^2 : diagonale de $A^2 = \{(x,x) : x \in A\}$

Solution :

1. ($\mathcal{R}$ Réflexive) $\Leftrightarrow$ ($DA^2 \subset \mathcal{R}$)

on a $[(x,x) \in DA^2] \Leftrightarrow (x \mathcal{R} x)$ car $\mathcal{R}$ est réflexive

($\forall x \in A : x \mathcal{R} x$).

2. ($\mathcal{R}$ Réflexive) $\Rightarrow$ ($\mathcal{R} \subset \mathcal{R}.\mathcal{R}$)

$((a,b) \in \mathcal{R}) \Leftrightarrow (a \mathcal{R} b)$.

Comme $\mathcal{R}$ est réflexive ; on a : $b \mathcal{R} x$

Donc : $((a,b) \in \mathcal{R}) \Rightarrow (a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} b) \Leftrightarrow (a \mathcal{R}.\mathcal{R} b) \Leftrightarrow ((a,b) \in \mathcal{R}.\mathcal{R})$

Donc : ($\mathcal{R}$ Réflexive) $\Rightarrow$ ($\mathcal{R} \subset \mathcal{R}.\mathcal{R}$)

3. ($\mathcal{R}$ Réflexive) $\Rightarrow$ ($\mathcal{R}.\mathcal{R}$ Réflexive).

($\mathcal{R}$ Réflexive) $\Leftrightarrow$ ($\forall a \in A : a \mathcal{R} A$) $\Leftrightarrow ((a,a) \in \mathcal{R})$

$((a,a) \in \mathcal{R}) \Rightarrow ((a,a) \in \mathcal{R}.\mathcal{R})$ (voir 2° Question)

Donc : ($\mathcal{R}$ Réflexive) $\Rightarrow$ ($\mathcal{R}.\mathcal{R}$ Réflexive).

4. $((a,b) \in \mathcal{R}_1.\mathcal{R}_2) \Leftrightarrow (\exists c \in A : a \mathcal{R}_2 c$ et $c \mathcal{R}_1 b) \Leftrightarrow ((a,c) \in \mathcal{R}_2$ et $(c,b) \in \mathcal{R}_1)$

Mais $((a,c) \in \mathcal{R}_2) \Rightarrow ((a,c) \in \mathcal{R}_2'$ (car $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_2'$) et $(c,b) \in \mathcal{R}_1) \Rightarrow ((c,b) \in \mathcal{R}_1'$

(car $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_1'$))

Donc : $(a,b) \in \mathcal{R}'_1.\mathcal{R}'_2$

Exercice 5 :

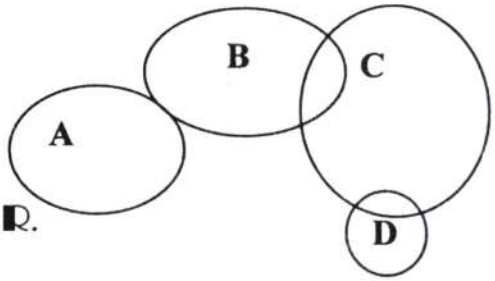
Soit E={A,B,C,D} tel que décrit sur le schéma ci-contre :

On definie sur E La relation $\mathcal{R}$ comme suit :

$[X \mathcal{R} Y] \Leftrightarrow [X \cap Y \neq \varnothing]$

1. Expliciter $\mathcal{R}$ comme partie de E x E.

2. Définir $\mathcal{R}^1$, ($\mathcal{R}\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}.\mathcal{R}$), $\mathcal{R}.\mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{R}^{-1}.\mathcal{R}$.



Solution :

1. R= { (A,A), (A,B),(B,B), (B,A), (B,C),(C,C),(C,B), (C,D),(D,D),(D,C)}.

2.

La relation $\mathcal{R}$ est symétrique donc : $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$

$[X \mathcal{R} Y] \Leftrightarrow [X \cap Y \neq \varnothing]$

(Voir exercice 3. 1. question).

Détermination de $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} . \mathcal{R}$:

<u>On a :</u>

$(A \mathcal{R} A$ et $A \mathcal{R} B)$	$\Rightarrow$	$A \mathcal{R}.\mathcal{R} B$	ou	$A \mathcal{R}^2 B$
$(A \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} B)$	$\Rightarrow$	$A \mathcal{R}.\mathcal{R} B$	ou	$\underline{A \mathcal{R}^2 B}$
$(A \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} A)$	$\Rightarrow$	$A \mathcal{R}.\mathcal{R} A$	ou	$A \mathcal{R}^2 A$
$(A \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} C)$	$\Rightarrow$	$A \mathcal{R}.\mathcal{R} C$	ou	$A \mathcal{R}^2 C$
$(B \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} A)$	$\Rightarrow$	$B \mathcal{R}.\mathcal{R} A$	ou	$B \mathcal{R}^2 A$
$(B \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} C)$	$\Rightarrow$	$B \mathcal{R}.\mathcal{R} C$	ou	$B \mathcal{R}^2 C$
$(B \mathcal{R} A$ et $A \mathcal{R} A)$	$\Rightarrow$	$B \mathcal{R}.\mathcal{R} A$	ou	$\underline{B \mathcal{R}^2 A}$
$(B \mathcal{R} A$ et $A \mathcal{R} B)$	$\Rightarrow$	$B \mathcal{R}.\mathcal{R} B$	ou	$B \mathcal{R}^2 B$
$(B \mathcal{R} C$ et $C \mathcal{R} C)$	$\Rightarrow$	$B \mathcal{R}.\mathcal{R} C$	ou	$\underline{B \mathcal{R}^2 C}$
$(B \mathcal{R} C$ et $C \mathcal{R} B)$	$\Rightarrow$	$B \mathcal{R}.\mathcal{R} B$	ou	$\underline{B \mathcal{R}^2 B}$
$(B \mathcal{R} C$ et $C \mathcal{R} D)$	$\Rightarrow$	$B \mathcal{R}.\mathcal{R} D$	ou	$B \mathcal{R}^2 D$
$(C \mathcal{R} C$ et $C \mathcal{R} B)$	$\Rightarrow$	$C \mathcal{R}.\mathcal{R} B$	ou	$C \mathcal{R}^2 B$
$(C \mathcal{R} C$ et $C \mathcal{R} D)$	$\Rightarrow$	$C \mathcal{R}.\mathcal{R} D$	ou	$C \mathcal{R}^2 D$
$(C \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} C)$	$\Rightarrow$	$C \mathcal{R}.\mathcal{R} C$	ou	$C \mathcal{R}^2 C$
$(C \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} B)$	$\Rightarrow$	$C \mathcal{R}.\mathcal{R} B$	ou	$\underline{C \mathcal{R}^2 B}$
$(C \mathcal{R} B$ et $B \mathcal{R} A)$	$\Rightarrow$	$C \mathcal{R}.\mathcal{R} A$	ou	$C \mathcal{R}^2 A$
$(C \mathcal{R} D$ et $D \mathcal{R} D)$	$\Rightarrow$	$C \mathcal{R}.\mathcal{R} D$	ou	$\underline{C \mathcal{R}^2 D}$
$(C \mathcal{R} D$ et $D \mathcal{R} C)$	$\Rightarrow$	$C \mathcal{R}.\mathcal{R} C$	ou	$\underline{C \mathcal{R}^2 C}$
$(D \mathcal{R} D$ et $D \mathcal{R} C)$	$\Rightarrow$	$D \mathcal{R}.\mathcal{R} C$	ou	$\underline{D \mathcal{R}^2 C}$
$(C \mathcal{R} C$ et $C \mathcal{R} C)$	$\Rightarrow$	$D \mathcal{R}.\mathcal{R} C$	ou	$\underline{D \mathcal{R}^2 C}$
$(D \mathcal{R} C$ et $C \mathcal{R} B)$	$\Rightarrow$	$D \mathcal{R}.\mathcal{R} B$	ou	$\underline{D \mathcal{R}^2 B}$
$(D \mathcal{R} C$ et $C \mathcal{R} D)$	$\Rightarrow$	$D \mathcal{R}.\mathcal{R} D$	ou	$\underline{D \mathcal{R}^2 D}$

Finalement :

$\mathbb{R}^2 = \{(A,B),(A,A),(A,C),(B,A),(B,C),(B,B),(B,D),(C,B),(C,D),(C,C),(C,A),(D,C),(D,B),(D,D)\}$.

Nous avons : $\mathbb{R} = \mathbb{R}^{-1}$ (2° Question) donc :

$\mathbb{R}^{-1} \bullet \mathbb{R} = \mathbb{R} \bullet \mathbb{R}^{-1} = \mathbb{R} \bullet \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$

3. $\mathbb{R}$ n'est pas Transitive car on a :

(A $\mathbb{R}$ B et B $\mathbb{R}$ C) et A $\not\mathbb{R}$ C. ($(A,B) \in \mathbb{R}$ et $(B,C) \in \mathbb{R}$) et $(A,C) \notin \mathbb{R}$.

Exercice 6 :

1. Soit $\mathbb{R}$ une relation réflexive, symétrique et Antisymétrique définie sur un ensemble E.

Montrer que $\mathbb{R} = \Delta$ (a $\mathbb{R}$ b) $\Leftrightarrow$ (a = b).

2. $\mathbb{R}_1$ et $\mathbb{R}_2$ étant deux relations définies sur le même ensemble X.

Montrer que $(\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2)^{-1} = \mathbb{R}_1^{-1} \cap \mathbb{R}_2^{-1}$ et $(\mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2)^{-1} = \mathbb{R}_1^{-1} \cup \mathbb{R}_2^{-1}$

Solution :

1. ($\mathbb{R}$ Réflexive) $\Leftrightarrow$ ($\Delta \subset \mathbb{R}$) ($\forall$ a$\in$A : a $\mathbb{R}$ a).

Montrons que $\mathbb{R} \subset \Delta$.

($(a,b) \in \mathbb{R}$)$\Rightarrow$($(b,a) \in \mathbb{R}$) car $\mathbb{R}$ est symétrique.

($(a,b) \in \mathbb{R}$ et $(b,a) \in \mathbb{R}$)$\Rightarrow$ (a = b) car $\mathbb{R}$ est Antisymétrique.

(a = b) $\Leftrightarrow$ ($(a,b) \in \Delta$).

Donc : $\mathbb{R} \subset \Delta$.

($\Delta \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \subset \Delta$) $\Leftrightarrow$ ($\mathbb{R} = \Delta$)

2. $(\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2)^{-1} = \mathbb{R}_1^{-1} \cap \mathbb{R}_2^{-1}$

Montrons que $(\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2)^{-1} \subset \mathbb{R}_1^{-1} \cap \mathbb{R}_2^{-1}$.

Soit : $(a,b) \in (\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2)^{-1}$:$[(a,b) \in (\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2)^{-1}] \Leftrightarrow [(b,a) \in (\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2)] \Leftrightarrow [(b,a) \in \mathbb{R}_1$ et $(b,a) \in \mathbb{R}_2)]$

$$\left.\begin{array}{l} ((b,a) \in \mathbb{R}_1) \Leftrightarrow ((a,b) \in \mathbb{R}_1^{-1}) \\ ((b,a) \in \mathbb{R}_2) \Leftrightarrow ((a,b) \in \mathbb{R}_2^{-1}) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (a,b) \in \mathbb{R}_1^{-1} \cap \mathbb{R}_2^{-1}$$

Donc : $(\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2)^{-1} \subset \mathbb{R}_1^{-1} \cap \mathbb{R}_2^{-1}$ (1)

Montrons à présent que : $\mathbb{R}_1^{-1} \cap \mathbb{R}\mathbb{R}_2^{-1} \subset (\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2)^{-1}$

$((a,b) \in \mathbb{R}_1^{-1} \cap \mathbb{R}_2^{-1}) \Leftrightarrow ((a,b) \in \mathbb{R}_1^{-1}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}_2^{-1}) \Leftrightarrow ((b,a) \in \mathbb{R}_1$ et $(b,a) \in \mathbb{R}_2)$

Donc : $((b,a) \in \mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2) \Leftrightarrow ((a,b) \in (\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2)^{-1})$

Et par suite : $\mathbb{R}_1^{-1} \cap \mathbb{R}_2^{-1} \subset (\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2)^{-1}$ (2)

Finalement : $[(1) \text{ et } (2)] \Leftrightarrow [(\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2)^{-1} = \mathbb{R}_1^{-1} \cap \mathbb{R}_2^{-1}]$

Montrons que $(\mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2)^{-1} \subset \mathbb{R}_1^{-1} \cup \mathbb{R}_2^{-1}$

Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2)^{-1}$

$[(a,b) \in (\mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2)^{-1}] \Leftrightarrow [(b,a) \in \mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2] \Leftrightarrow [(b,a) \in \mathbb{R}_1$ ou $[(b,a) \in \mathbb{R}_2]$.

$[(b,a) \in \mathbb{R}_1$ ou $[(b,a) \in \mathbb{R}_2]$.$] \Leftrightarrow [(a,b) \in \mathbb{R}_1^{-1}$ ou $[(a,b) \in \mathbb{R}_2^{-1}] \Leftrightarrow [(a,b) \in \mathbb{R}_1^{-1} \cup \mathbb{R}_2^{-1}]$

Donc : $(\mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2)^{-1} \subset \mathbb{R}_1^{-1} \cup \mathbb{R}_2^{-1}$ (*).

Montrons a présent que : $\mathbb{R}_1^{-1} \cup \mathbb{R}_2^{-1} \subset (\mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2)^{-1}$

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_1^{-1} \cup \mathbb{R}_2^{-1}$

$[(a,b) \in \mathbb{R}_1^{-1} \cup \mathbb{R}_2^{-1}] \Leftrightarrow [(a,b) \in \mathbb{R}_1^{-1}$ ou $(a,b) \in \mathbb{R}_2^{-1}] \Leftrightarrow [(b,a) \in \mathbb{R}_1$ ou $(b,a) \in \mathbb{R}_2]$

$[(b,a) \in \mathbb{R}_1$ ou $(b,a) \in \mathbb{R}_2] \Leftrightarrow [(b,a) \in \mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2] \Leftrightarrow [(a,b) \in (\mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2)^{-1}]$

Donc : $\mathbb{R}_1^{-1} \cup \mathbb{R}_2^{-1} \subset (\mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2)^{-1}$ (**)

Finalement : $[(*) \text{ et } (**)] \Leftrightarrow [(\mathbb{R}_1 \cup \mathbb{R}_2)^{-1} = \mathbb{R}_1^{-1} \cup \mathbb{R}_2^{-1}]$

Exercice 7 :

1. Soit $\mathbb{R}$ une relation non vide définie sur un ensemble E telle que :

$\forall a \in E : (a,a) \notin \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ symétrique.

$\mathbb{R}$ peut elle être transitive ?.

. Soit $\mathbb{R}'$ une relation symétrique et non réflexive.

$\mathbb{R}'$ peut-elle être transitive ?.

Solution :

1. $(\mathbb{R} \neq \varnothing) \Leftrightarrow (\exists (a,b) \in \mathbb{R})$

$((a,b) \in \mathbb{R}) \Rightarrow ((b,a) \in \mathbb{R})$ ($\mathbb{R}$ Symétrique).

$\mathcal{R}$ ne peut être transitive car si elle l'était on aurait :

$[(a,b) \in \mathcal{R}$ et $(b,a) \in \mathcal{R}] \Rightarrow [(a,a) \in \mathcal{R}]$ Contradiction avec $\forall\, a \in E : (a,a) \notin \mathcal{R}$.

2. $\mathcal{R}'$ peut etre transitive

Considérer $\mathcal{R}' = \{ (a,b), (b,a),(a,a) \}$ définie sur $\{a,b\}$

$\mathcal{R}'$ est symétrique mais non réflexive car $(b,b) \notin \mathcal{R}$.

$\mathcal{R}'$ est transitive , $(a,a) \in \mathcal{R}$, $(b,a) \in \mathcal{R}$ et $(a,a) \in \mathcal{R}$.

➲ remarque :

$\mathcal{R}'$ peut être non transitive

Soit $\mathcal{R}'$ définie sur $\{a,b\}$ par $\mathcal{R}'=\{(a,b),(b,a)\}$

Elle est symétrique, non réflexive et non transitive $(a,a) \notin \mathcal{R}$.

Exercice 8 :

Montrer qu'une relation symétrique et transitive dont aucune classe à droite n'est vide est réflexive.

Solution :

Rappelons d'abord que pour un élément $\alpha \in E$, sa classe à droite suivant la relation $\mathcal{R}$ notée $\alpha\, \mathcal{R}$ est :

$\alpha\, \mathcal{R} = \{ \beta \in E : (\alpha,\beta) \in \mathcal{R} \}$.

Supposons à présent $\mathcal{R}$ définie sur E, symétrique, transitive et telle que : $\forall\, \alpha \in E ; \alpha R \neq \varnothing$

Soit $\alpha \in E$; on a : $[\alpha\mathcal{R} \neq \varnothing] \Leftrightarrow [\exists\, \beta \in E : (\alpha,\beta) \in \mathcal{R}]$

$[(\alpha,\beta) \in \mathcal{R}] \Rightarrow [(\beta,\alpha) \in \mathcal{R}]$ $\quad$ ($\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$ symétrique).

On a maintenant : $[(\alpha,\beta) \in \mathcal{R}$ et $(\beta,\alpha) \in \mathcal{R}] \Rightarrow [(\alpha,\alpha) \in \mathcal{R}]$ par transitivité ($\mathcal{R}$ est transitive).

Finalement : $\boxed{\forall\, \alpha \in E ; (\alpha,\alpha) \in \mathcal{R} \text{ et par suite } \mathcal{R} \text{ est réflexive}}$

Exercice 9 :

Une relation $\mathcal{R}$ définie sur E est dite circulaire si et seulement si :

$\forall$ (a,b,c) $\in E^3$; [(a,b) $\in \mathcal{R}$ et (b,c) $\in \mathcal{R}$]$\Rightarrow$ [(c,a) $\in \mathcal{R}$]

1. Montrer que toute relation circulaire et symétrique définie sur un ensemble E telle que toute classe à droite est non vide est une relation d'équivalence.

2. Montrer que toute relation transitive et symétrique définie sur un ensemble E est circulaire.

Solution :

1. $\mathcal{R}$ étant symétrique il s'agit donc de prouver que $\mathcal{R}$ est réflexive et transitive.

Montrons d'abord que $\mathcal{R}$ est réflexive :

Soit : a $\in$ E.

($\alpha\mathcal{R} \neq \varnothing$) $\Leftrightarrow$ ($\exists$ b $\in$ E : (a,b) $\in \mathcal{R}$)

((a,b) $\in \mathcal{R}$)$\Rightarrow$ ((b,a) $\in \mathcal{R}$) ($\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$ car $\mathcal{R}$ est symétrique).

On a donc [(a,b) $\in \mathcal{R}$ et (b,a) $\in \mathcal{R}$]$\Rightarrow$ [(a,a) $\in \mathcal{R}$].

Car $\mathcal{R}$ circulaire (a = c dans la définition) : [$\forall$ a $\in$ E ; (a,a) $\in \mathcal{R}$] $\Leftrightarrow$($\mathcal{R}$ Réflexive).

Montrons que $\mathcal{R}$ est transitive :

Soient (a,b,c) $\in E^3$: (a,b)$\in \mathcal{R}$ et (b,c) $\in \mathcal{R}$.

$\mathcal{R}$ étant ci $\mathcal{R}$ culaire on a donc (c,a) $\in \mathcal{R}$.

mais ((c,a) $\in \mathcal{R}$)$\Rightarrow$((a,c) $\in \mathcal{R}$) ($\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$ car $\mathcal{R}$ symétrique).

Donc : [(a,b) $\in \mathcal{R}$ et (b,c) $\in \mathcal{R}$] $\Rightarrow$ [(a,c) $\in \mathcal{R}$], $\mathcal{R}$ est transitive.

$\mathcal{R}$ est donc une relation d'Equivalence.

2. Soit (a,b,c) $\in E^3$: (a,b) $\in \mathcal{R}$ et (b,c) $\in \mathcal{R}$.

Alors : (a,c) $\in \mathcal{R}$ (car $\mathcal{R}$ est transitive).

Mais : ((a,c) $\in \mathcal{R}$)$\Rightarrow$ ((c,a)$\in \mathcal{R}$) (car $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}$, $\mathcal{R}$ étant symétrique).

Finalement : [(a,b) $\in \mathcal{R}$ et (b,c) $\in \mathcal{R}$] $\Rightarrow$ [(c,a) $\in \mathcal{R}$]

$\mathcal{R}$ est donc circulaire.

➲ **remarque:**

On définit aussi pour un élément $\alpha \in E$ sa classe à gauche $\mathcal{R}\,\alpha$ comme suit :

$\mathcal{R}\,\alpha = \{ \beta \in E : (\beta,\alpha) \in \mathcal{R} \}$.

Exercice 10 :

Soient X et E deux ensembles non vides et $\mathcal{R}$ une relation définie sur E.

1. Montrer l'implication :

($\mathcal{R}$ Réflexive) $\Rightarrow$ [$\forall f : X \to E : \forall (x,y) \in X^2 : x = y \Rightarrow f(x)\ \mathcal{R}\ f(y)$] (*).

2. Montrer que l'implication réciproque est vraie sur l'ensemble des applications Surjectives : $f : X \to E$ vérifiant la condition (*).

C'est à dire : [$\exists f : X \to E$ Surjective : $\forall (x,y) \in X^2 : x = y \Rightarrow f(x)\ \mathcal{R}\ f(x)$] $\Rightarrow$ ($\mathcal{R}$ Réflexive)

Solution :

1. Soit $f : X \to E$ une application. on a :

$\forall (x,y) \in X^2 : (x = y) \Rightarrow (f(x) = f(y))$ (car f est une application).

or $\mathcal{R}$ est réflexive donc $f(x)\ \mathcal{R}\ f(y)$. (car $x \in X$, $f(x) \in E$, $y \in x$, $f(y) \in E$).

donc : ($\mathcal{R}$ réflexive) $\Rightarrow$ [$\forall f : X \to E$ Application : $\forall (x,y) \in X^2 (x=y) \Rightarrow (f(x)\ \mathcal{R}\ f(y))$].

2. Considérons à présent une application

$f : X \to E$ Surjective vérifiant (*).

Montrons que $\mathcal{R}$ est réflexive.

$(y \in E) \Leftrightarrow (\exists x \in X : y = f(x))$ (f surjective) et $f : X \to E$ surjective.

On a : $(x = x) \Rightarrow (f(x)\ \mathcal{R}\ f(x))$ [d'après la condition (*)].

$(f(x)\ \mathcal{R}\ f(x)) \Leftrightarrow (y\ \mathcal{R}\ y)$ [car $y = f(x)$].

donc : [$\forall y \in E : y\ \mathcal{R}\ y$] $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}$ réflexive).

➲ **remarque :**

Toute application f vérifiant (*) réalise un homomorphisme de (x,=). Dans (E , $\mathcal{R}$)

Exercice 11 :

1. Soit $(\mathcal{R}_i)_{i\in I}$ une famille de relations binaires indexées par I, définies sur un ensemble non vide E et telle que $\forall i \in I$: $\mathcal{R}_i$ symétrique.

❶ Montrer que : $\bigcap_{i\in I} R_i$ et $\bigcup_{i\in I} R_i$ sont deux relations symétriques définies sur E.

❷ Montrer que : $\mathcal{R}$ étant une relation quelconque définie sur un ensemble E : la relation $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ est une relation symétrique définie sur E et qu'elle est égale à L'intersection de toutes les relations symétriques définie sur E contenant $\mathcal{R}$.

2. On suppose à présent que $(\mathcal{R}_i)_{i\in I}$ est une famille de relations réflexives définies sur E.

❶ Montrer que : $\bigcap_{i\in I} R_i$ est une relation réflexive définie sur E.

❷ Soit S une relation quelconque et $\mathcal{R}$ une relation réflexive définie sur le même ensemble E.

Montrer que : $[x\, S\, y] \Rightarrow [\, x\, \mathcal{R}.S\, y$ et $x\, S.\mathcal{R}\, y\,]$.

❸ Soit $\mathcal{R}$ une relation quelconque définie sur E.

Montrer $\mathcal{R} \cup \Delta$ est une relation réflexive et que $\mathcal{R} \cup \Delta$ est égale à l'intersection de toutes les relations réflexives contenant $\mathcal{R}$ définies sur E.

Solution :

1.

❶ Soit $(a,b) \in \bigcap_{i\in I} R_i$, alors $\forall i \in I : (a,b) \in \mathcal{R}_i$.

$[\,\forall i \in I, (a,b) \in \mathcal{R}_i] \Leftrightarrow [\,\forall i \in I\ (b,a) \in \mathcal{R}_i\,]$ car $\forall i \in I$, $\mathcal{R}_i$ est Symétrique.

$[\,\forall i \in I, (b,a) \in \mathcal{R}_i\,] \Leftrightarrow [\,(b,a) \in \bigcap_{i\in I} R_i\,]$.

donc : $[(a,b) \in \bigcap_{i\in I} R_i] \Leftrightarrow [(b,a) \in \bigcap_{i\in I} R_i]$ et $\bigcap_{i\in I} R_i$ est symétrique $[(\bigcap_{i\in I} R_i)=(\bigcap_{i\in I} R_i)^{-1}]$

Soit $(x,y) \in \mathcal{R}_i$ alors $\exists i_0 \in I : (x,y) \in \mathcal{R}_{i_0} : [(x,y) \in \mathcal{R}_{i_0} R i_0] \Leftrightarrow [(y,x) \in \mathcal{R}_{i_0}\,]$ car $\mathcal{R}_{i_0}$ est symétrique.

$[(y,x) \in \mathcal{R}_{i_0}] \Rightarrow [(y,x) \in \bigcup_{i \in I} R_i \ (i_0 \in I)]$.

Donc : $[(x,y) \in \bigcup_{i \in I} R_i] \Rightarrow [(y,x) \in \bigcup_{i \in I} R_i]$

Donc : $\bigcup_{i \in I} R_i$ est symétrique

❷ $[(a,b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}] \Leftrightarrow [(a,b) \in \mathcal{R}$ ou $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}]$

$((a,b) \in \mathcal{R}) \Leftrightarrow ((b,a) \in \mathcal{R}^{-1}) \Rightarrow ((b,a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1})$ car $\mathcal{R}^{-1} \subset \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$.

$((a,b) \in \mathcal{R}^{-1}) \Leftrightarrow ((b,a) \in \mathcal{R}) \Rightarrow ((b,a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1})$ car $\mathcal{R} \subset \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$

Dans les deux cas : $[(a,b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}] \Rightarrow [(b,a) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}]$ et $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ est symétrique

Montrons que $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ est l'intersection de toutes les relations symétriques contenant $\mathcal{R}$.

Remarquons d'abord que $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ contient $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R} \subset \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$)

De ce fait $\bigcap_{R \in SER} R \subset \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$

$\bigcap_{R \in SER} R$ représente l'intersection de toutes les relations symétriques contenant $\mathcal{R}$, définies sur E.

Il reste à prouver que $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} \subset \bigcap_{R \in SER} R$

Soit $(a,b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ alors $(a,b) \in \mathcal{R}$ ou $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}$

Si $(a,b) \in \mathcal{R}$ alors $\forall\, \mathcal{R}' \in SER : (a,b) \in \mathcal{R}'$.

donc : $(a,b) \in \bigcap_{R \in SER} R$

Si $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}$ alors $(b,a) \in \mathcal{R}$ et alors $\forall\, \mathcal{R}' \in SER : (b,a) \in \mathcal{R}'$

donc : $(a,b) \in \mathcal{R}'$ car $\mathcal{R}'$ est symétrique.

$[\forall \mathcal{R}' \in SER : (a,b) \in \mathcal{R}'] \Rightarrow [(a,b) \in \bigcap_{R \in SER} R]$

Dans les deux cas : $[(a,b) \in \mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}] \Rightarrow [(a,b) \in \bigcap_{R \in SER} R]$

donc : $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} \subset \bigcap_{R \in SER} R$

Finalement : $\boxed{\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} = \bigcap_{R \in SER} R}$

➲ **remarque :**

$\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}$ est la plus petite relation symétrique contenant $\mathcal{R}$ et définie sur E (au sens de l'inclusion).

Elle est appelée <u>La clôture symétrique</u> de la relation $\mathcal{R}$.

2. on a $\forall i \in I$: $\mathcal{R}_i$ réflexive et donc :

❶ $\forall a \in E, \forall i \in I : (a,a) \in \mathcal{R}_i$.

Ce qui équivaut à : $(\forall a \in E, (a,a) \in \bigcap_{i\in I} R_i) \Leftrightarrow (\bigcap_{i\in I} R_i$ réflexive).

❷ $\mathcal{R}$ étant réflexive on a toujours :

$\forall x \in E : x \mathcal{R} x$ et $\forall y \in E : y \mathcal{R} y$.

$(x \mathcal{R} x$ et $x S y) \Rightarrow (x S. \mathcal{R} y)$.

$(x S y$ et $y \mathcal{R} y) \Rightarrow (x \mathcal{R}. S y)$.

donc : $(x S y) \Rightarrow [x S. \mathcal{R} y$ et $x \mathcal{R}. S y]$.

❸ $\forall a \in E : (a = a) \Leftrightarrow (\forall a \in E\ (a,a) \in \Delta) \Rightarrow ((a,a) \in \mathcal{R} \cup \Delta)$ car $\Delta \subset \mathcal{R} \cup \Delta$

donc : $\forall \mathcal{R} : \mathcal{R} \cup \Delta$ est réflexive.

Appelons $\mathbf{R}_{RER}$ L'ensemble de toutes les relations réflexives définies sur E et contenant $\mathcal{R}$.

Remarquons que $\mathcal{R} \cup \Delta \in \mathbf{R}_{RER}$ car $\mathcal{R} \subset \mathcal{R} \cup \Delta$ et. $\mathcal{R} \cup \Delta$ est réflexive.

et que : $\bigcap_{R \in R_{RER}} R \subset \mathcal{R} \cup \Delta$ (1)

Il reste à prouver que : $\mathcal{R} \cup \Delta \subset \bigcap_{R \in R_{RER}} R$ (2)

Pour cela considérons : $(a,b) \in \mathcal{R} \cup \Delta$:

$((a,b) \in \mathcal{R} \cup \Delta) \Leftrightarrow ((a,b) \in \mathcal{R}$ ou $(a,b) \in \Delta)$.

si $(a,b) \in \mathcal{R}$ alors $\forall \mathcal{R}' \in \mathbf{R}_{RER} : (a,b) \in \mathcal{R}'$.[car on a $(\mathcal{R} \subset \mathcal{R}')$].

Et par suite : $(a,b) \in \bigcap_{R \in R_{RER}} R$.

Si $(a,b) \in \Delta$: on a $\forall \mathcal{R}$ réflexive : $\Delta \subset \mathcal{R}$ et donc : $(a,b) \in \mathcal{R}$ et par suite $(a,b) \in \bigcap_{R \in R_{RER}} R$.

Finalement : $\mathcal{R} \cup \Delta \subset \bigcap_{R \in R_{RER}} R$ (2)

$[(1)$ et $(2)] \Leftrightarrow [\mathcal{R} \cup \Delta = \bigcap_{R \in R_{RER}} R]$

➲ **remarque :**

La relation $\mathcal{R} \cup \Delta$ est la plus petite relation réflexive définie sur E et contenant $\mathcal{R}$ Elle est appelée : Clôture réflexive de $\mathcal{R}$.

Exercice 12 :

Soit $\mathcal{R}$ une relation définie sur un ensemble non vide E.

1. Déterminer la clôture symétrique de sa clôture réflexive.

2. Déterminer la clôture réflexive de sa clôture symétrique.

3. Montrer que les deux clôtures de la relation $\mathcal{R}$ sont égales appelées clôture symétrique réflexive de $\mathcal{R}$.

4. Montrer que la clôture symétrique réflexive de $\mathcal{R}$ est la plus petite relation symétrique et réflexive définie sur E et contenant $\mathcal{R}$ (c'est donc l'intersection de toutes les relations symétriques et réflexives définie sur E et contenant $\mathcal{R}$).

Solution :

1. $(\mathcal{R} \cup \Delta)\cup(\mathcal{R} \cup \Delta)^{-1}$est la clôture symétrique de la clôture réflexive de $\mathcal{R}$.

$(\mathcal{R} \cup \Delta)\cup(\mathcal{R} \cup \Delta)^{-1}= (\mathcal{R} \cup \Delta)\cup(\mathcal{R}^{-1} \cup \Delta^{-1})$

car $(\mathcal{R} \cup \Delta)^{-1}= \mathcal{R}^{-1} \cup \Delta^{-1}$ (voir exercice 6. 2. question).

$(\mathcal{R} \cup \Delta)\cup(\mathcal{R}^{-1} \cup \Delta^{-1}) = (\mathcal{R} \cup \Delta)\cup(\Delta^{-1}\cup \mathcal{R}^{-1}) = \mathcal{R} \cup(\Delta\cup\Delta^{-1})\cup \mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R} \cup\Delta\cup \mathcal{R}^{-1}$

$\Delta\cup\Delta^{-1}=\Delta\cup\Delta= \Delta$ $[(\Delta$ Symétrique$) \Leftrightarrow (\Delta = \Delta^{-1})]$.

et $\mathcal{R} \cup\Delta\cup \mathcal{R}^{-1} = (\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1})\cup\Delta$

2. $(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1})\cup\Delta$ est la clôture réflexive de la clôture symétrique de $\mathcal{R}$.

3. les deux clôtures de $\mathcal{R}$ sont égales car :

$(\mathcal{R} \cup \Delta)\cup(\mathcal{R}^{-1} \cup \Delta^{-1}) = (\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1})\cup\Delta$ (voir 1ère question).

4. Appelons $\mathbf{R}_{SRER}$ l'ensemble des relations symétriques et réflexives définies sur E et contenant $\mathcal{R}$.

Remarquons que : $(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}) \cup \Delta \in \mathcal{R}_{SRER}$ car elle est symétrique et réflexive.

Il est évident que : $\bigcap_{R \in R_{SRER}} R \subset (\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}) \cup \Delta$ (1)

Montrons à présent que : $(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}) \cup \Delta \subset \bigcap_{R \in R_{SRER}} R$

Soit $(a,b) \in (\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}) \cup \Delta$

$(a,b) \in \mathcal{R}$ ou $(a,b) \in \mathcal{R}^{-1}$ ou $(a,b) \in \Delta$.

- $((a,b) \in \mathcal{R}) \Rightarrow (\forall \mathcal{R}' \in \mathbf{R}_{SRER} : (a,b) \in \mathcal{R}')$ car $(\mathcal{R} \subset \mathcal{R}')$ et donc : $(a,b) \in \bigcap_{R \in R_{SRER}} R$
- $((a,b) \in \mathcal{R}^{-1}) \Leftrightarrow ((b,a) \in \mathcal{R}) \Rightarrow (\forall \mathcal{R}' \in \mathbf{R}_{SRER} : (b,a) \in \mathcal{R}.)$ $(\mathcal{R} \subset \mathcal{R}')$

$((b,a) \in \mathcal{R}') \Leftrightarrow ((a,b) \in \mathcal{R}')$ (car $\mathcal{R}'$est symétrique).

$[\forall \mathcal{R}' \in \mathbf{R}_{SRER} : (a,b) \in \mathcal{R}'] \Leftrightarrow [(a,b) \in \bigcap_{R \in R_{SRER}} R]$.

- $(a,b) \in \Delta$ on a : $\forall \mathcal{R}' \in \mathbf{R}_{SRER} : \Delta \subset \mathcal{R}'$ car $\mathcal{R}'$ est réflexive.

donc : $[\forall \mathcal{R}' \in \mathbf{R}_{SRER} : (a,b) \in \Delta \Rightarrow (a,b) \in \mathcal{R}'] \Leftrightarrow [(a,b) \in \Delta] \Rightarrow [(a,b) \in \bigcap_{R \in R_{SRER}} R]$.

finalement : $\forall (a,b) \in E^2 : [(a,b) \in (\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}) \cup \Delta] \Rightarrow [(a,b) \in \bigcap_{R \in R_{SRER}} R]$.

Et par suite : $(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}) \cup \Delta \subset \bigcap_{R \in R_{SRER}} R$ (2)

$[(1) \text{ et } (2)] \Leftrightarrow [(\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1}) \cup \Delta = \bigcap_{R \in R_{SRER}} R]$

Exercice 13 :

Soit E un ensemble non vide, appelons **RtE** l'ensemble des relations transitives définies sur E.

1.

a. Montrer $\bigcap_{R \in R_{RtE}} R \in$ **RtE.**

b. à quelle(s) condition(s) on a : $\bigcup_{R \in R_{RtE}} R \in$ **RtE.**

Soit $\mathbf{S}$ une relation quelconque. Appelons **RtES** L'ensemble des relations transitives définies sur E et contenant $\mathbf{S}$.

a. Montrer $\bigcap_{R \in R_{RtES}} R \in$ **RtES**

b. à quelle(s) condition(s) on a $\bigcup_{R \in R_{RtES}} R \in$ **RtES**.

Solution :

1.

a. $\bigcap_{R \in R_{RtE}} R \in$ **RtE.**

Soit $(a,b,c) \in E^3$: $(a,b) \in \bigcap_{R \in R_{RtE}} R$ et $(b,c)) \in \bigcap_{R \in R_{RtE}} R$

Alors : $\forall \mathbb{R} \in$ **RtE**, $[(a,b) \in \mathbb{R}$ et : $(b,c) \in \mathbb{R}] \Rightarrow [(a,c) \in \mathbb{R}]$ (car $\mathbb{R} \in$ **RtE**).

$(\forall \mathbb{R} \in$ **RtE**, $(a,c) \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow ((a,c) \in \bigcap_{R \in R_{RtE}} R)$

donc : $((a,b) \in \bigcap_{R \in R_{RtE}} R$ et $(b,c) \in \bigcap_{R \in R_{RtE}} R) \Rightarrow ((a,c) \in \bigcap_{R \in R_{RtE}} R)$

Et par suite : $\bigcap_{R \in R_{RtE}} R \in$ **RtE**.

b. Soit $(a,b,c) \in E^3$: $(a,b) \in \bigcup_{R \in R_{RtE}} R$ et $(b,c) \in \bigcup_{R \in R_{RtE}} R$

alors : $\exists (\mathbb{R}_0, \mathbb{R}_1) \in$ **(RtE)**^{2} : $(a,b) \in \mathbb{R}_0$ et $(b,c) \in \mathbb{R}_1$.

Si $\mathbb{R}_0 \subset \mathbb{R}_1$ alors on aurait $[(a,b) \in \mathbb{R}_1$ et $(b,c) \in \mathbb{R}_1] \Rightarrow [(a,c) \in \mathbb{R}_1]$ (car $\mathbb{R}_1$ est transitive).

$((a,c) \in \mathbb{R}_1 \in$ **RtE** $) \Rightarrow ((a,c) \in \bigcup_{R \in R_{RtE}} R)$

de même si $\mathbb{R}_1 \subset \mathbb{R}_0$, on aurait :

$[(a,b) \in \mathbb{R}_0$ et $(b,c) \in \mathbb{R}_0] \Rightarrow [(a,c) \in \mathbb{R}_0]$ (car $\mathbb{R}_0$ est transitive).

$[(a,c) \in \mathbb{R}_0 \in$ **RtE** $] \Rightarrow [(a,c) \in \bigcup_{R \in R_{RtE}} R]$

Donc $\bigcup_{R \in R_{RtE}} R \in$ **RtE** s'il existe au moins deux éléments de **RtE** dont l'un est inclus dans l'autre ($R_0 \subset R_1$ ou $R_1 \subset R_0$), sinon $\bigcup_{R \in R_{RtE}} R$ n'est pas transitive (voir exercice 4.2. 2ème question).

2.

On a si :

$\forall R \in$ **RtE** : $S \subset R$ alors $\bigcap_{R \in R_{RtE}} R$ contient S et $\bigcup_{R \in R_{RtE}} R$ contient S, par définition même de l'inclusion, l'intersection et l'union.

donc $\bigcap_{R \in R_{RtES}} R \in$ **RtES** : (voir la 1ère question a.)

et $\bigcup_{R \in R_{RtES}} R \in$ **RtES** : s'il existe $R_0, R_1 \in$ **RtE** : $R_0 \subset R_1$ ou $R_1 \subset R_0$

➲ **Remarque:**

L'ensemble **RtE** $\neq \emptyset$ ($E^2 \in$ **RtE**).

$\bigcap_{R \in R_{RtES}} R$ est appelée la clôture transitive de la relation S.

CHAPITRE R SECTION 2

Relations d'équivalence

(7 Exercices, 23 Questions)

- ☐ Relation d'équivalence associée à une application.
- ☐ Relation d'équivalence définie sur $\prod_{i \in I} E_i$
- ☐ Partie saturée par une relation - partie saturée engendrée par une partie A (SatA).
- ☐ Relations connexes.

Exercice 1 :

Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application.

On définit sur E la relation R par :

$\forall(x,y) \in E^2 : [x \, R \, y] \Leftrightarrow [f(x) = f(y)]$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.

2. Définir cl(x) dans le cas où f est injective pour $x \in E$.

(cl(x) étant la classe d'équivalence de $x \in E$)

Solution :

1.

- On a :

  $[\forall x \in E: f(x) = f(x)] \Leftrightarrow (\forall x \in E: x \, R \, x)$ (l'égalité sur F est réflexive).

  donc R est réflexive.

- Pour $(x,y) \in E^2 : x \, R \, y$ on a :

  $(f(x) = f(y)) \Rightarrow (f(y) = f(x))$ car l'égalité sur F est symétrique.

  donc $[x \, R \, y] \Rightarrow [y \, R \, x]$ et par suite R est symétrique.

- Soit $(x,y,z) \in E^3 : x \, R \, y$ et $y \, R \, z$.

  $(x \, R \, y$ et $y \, R \, z) \Leftrightarrow [f(x) = f(y)$ et $f(y) = f(z)] \Rightarrow [f(x) = f(z)] \Leftrightarrow (x \, R \, z)$

  donc $(x \, R \, y$ et $y \, R \, z) \Rightarrow (x \, R \, z)$ et par conséquent R est transitive.

  (R réflexive, symétrique, transitive) $\Leftrightarrow$ (R est une relation d'équivalence définie sur E).

2.

$(f : E \to F$ Injective$) \Leftrightarrow (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$.

donc pour f injective $cl(x) = \{x\}$.

remarque:

R est appelée relation d'équivalence associée à l'application f .

Exercice 2 :

Soient E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application.

F étant muni d'une relation d'équivalence S.

On définit sur l'ensemble E la relation R par :

$\forall (x , y) \in E^2 : (x \, R \, y) \Leftrightarrow (f(x) \, S \, f(y))$.

1. Montrer que R est une relation d'équivalence.
2. Pour $x \in E$, définir Cl(x) où Cl(x) est la classe d'équivalence de x suivant R.

Solution :

1.

- On a : $\forall x \in E : f(x) \, S \, f(x)$ car S est réflexive sur F.

  $(f(x) \, S \, f(x)) \Leftrightarrow (x \, R \, x)$ donc : $[\forall x \in E : x \, R \, x] \Leftrightarrow$ (R est réflexive).
- $\forall (x,y) \in E^2 : (f(x) \, S \, f(x)) \Rightarrow (f(y) \, S \, f(x))$ car S est symétrique sur F.

  $[f(x) \, S \, f(y)] \Rightarrow [f(y) \, S \, f(x)] \Leftrightarrow [(x \, R \, y) \Rightarrow (y \, R \, x)]$

  donc : R est symétrique.
- $\forall (x,y,z) \in E^3 : [f(x) \, S \, f(y)$ et $f(y) \, S \, f(z)] \Rightarrow [f(x) \, S \, f(z)]$

  $[f(x) \, S \, f(z)] \Leftrightarrow [\forall (x,y,z) \in E^3 \, (x \, R \, y$ et $y \, R \, z) \Rightarrow (x \, R \, z)]$.

  donc : R est transitive.

  [R réflexive, symétrique et transitive] $\Leftrightarrow$(R relation d'équivalence définie sur E).

1. Pour $x \in E$: $Cl(x) = \{ y \in E : f(x) \, S \, f(y) \} = \{ y \in E : f(y) \in Cl[f(x)] \}$.

   $Cl[f(x)]$ est la classe d'équivalence de $f(x)$ suivant la relation S définie sur F.

➲ remarque :

- $Cl(x) \neq \phi$ ($x \in Cl(x)$) car : $f(x) \, S \, f(x)$.
- On dit que l'application $f : (E, R) \to (F, S)$ est compatible avec les relations R et S définies sur E et F, ou que f réalise un homomorphisme de (E, R) dans (F, S).

Exercice 3 :

Soient E un ensemble non vide et $P \in p(E)$.

On définie sur $p(E)$ la relation R par :

$(X \mathrm{R} Y) \Leftrightarrow (X \cap P = Y \cap P)$.

1. Montrer que R est une relation d'équivalence définie sur $p(E)$.
2. Pour $X \in p(E)$, définir Cl (X) où Cl (X) est la classe d'équivalence de X suivant R.
3. Exhiber une transformation de $p(E)$ dont R est le noyau.

Solution :

1.

- On a : $\forall X \in p(E)$: $X \cap P = X \cap P$.

  donc : $\forall X \in p(E)$: $X \mathrm{R} X$ et par suite R est réflexive.
- $\forall (X, Y) \in (p(E))^2$: $(X \cap P = Y \cap P) \Rightarrow (Y \cap P = X \cap P)$ car l'égalité sur $p(E)$ est symétrique.

[$(X \cap P = Y \cap P) \Rightarrow (Y \cap P = X \cap P)$] $\Leftrightarrow$ [$(X \mathrm{R} Y) \Rightarrow (Y \mathrm{R} X)$] $\Leftrightarrow$ (R est symétrique).

- $\forall (X, Y, Z) \in (p(E))^3$: [[$X \cap P = Y \cap P$] et[$Y \cap P = Z \cap P$]] $\Rightarrow$ $(X \cap P = Z \cap P)$ car l'égalité sur $p(E)$ est transitive donc : $(X \mathrm{R} Y$ et $Y \mathrm{R} Z) \Rightarrow (X \mathrm{R} Z)$ et par suite R est transitive.

[R réflexive, symétrique, transitive] $\Leftrightarrow$ [R est une relation d'équivalence définie sur $p(E)$] .

2.

$Cl(x) = \{ Y \in p(E): X \cap P = Y \cap P\}$.

$(X \cap P = Y \cap P) \Leftrightarrow (Y = ((X \cap P) \cup A)$ avec $A \in p(C_E P)$

car $[(X \cap P) \cup A] \cap P = [(X \cap P) \cup (A \cap P)] = (X \cap P) \cup \phi = X \cap P$.

donc $Cl(x) = \{Y \in p(E): Y = (X \cap P) \cup A,\ A \in p(C_E P)\}$.

3.

$$T : p(E) \rightarrow p(E)$$
$$X \rightarrow X \cap P$$

on a : $(X \mathrm{KerT} Y) \Leftrightarrow (T(Y) = T(X)) \Leftrightarrow (X \cap P = Y \cap P)$ et par suite $(X \mathrm{KerT} Y) \Leftrightarrow (X \mathrm{R} Y)$ donc $((X,Y) \in \mathrm{KerT}) \Leftrightarrow ((X,Y) \in \mathrm{R})$ et R est le noyau de la transformation T de $p(E)$ définie plus haut.

Exercice 4 :

Soit E un ensemble non vide .

I. Soient P et Φ deux parties non vides de E telles que : $P \not\subset \Phi$, $\Phi \not\subset P$, $P \cap \Phi \neq \phi$.

1. Montrer que la relation $\Delta \cup (P \times P)$ est une relation d'équivalence définie sur E

2. Montrer que $\Delta \cup (P \times P) \cup (\Delta \cup (\Phi \times \Phi))$ n'est pas transitive.

3. R_1, R_2 étant deux relations définies sur E. Montrer que $(R_1 . R_2)^{-1} = R_2^{-1} . R_1^{-1}$.

II. Soient à présent R_1 et R_2 deux relations d'équivalence définies sur E.

1. Donnez un exemple où $R_1 . R_2$ n'est pas symétrique .

2. a. Montrer que $R_1 . R_2$ est réflexive.

b. Etablir ($R_1 . R_2 = R_2 . R_1$)$\Leftrightarrow$ ($R_1 . R_2$ est une relation d'équivalence définie sur E).

Solution :

I.

- $\forall a \in E$: $a \Delta a$ car l'égalité est réflexive sur E.

donc $\forall a \in E$: $a \, \Delta \cup (P \times P) \, a$ et par suite : $\Delta \cup (P \times P)$ est réflexive.

- $\forall (a,b) \in E^2$: $(a \, \Delta \cup (P \times P) \, b) \Rightarrow (b \, \Delta \cup (P \times P)) \, a$ car $(a \Delta \cup (P \times P) \, b) \Leftrightarrow (a \, \Delta \, b$ ou $a \, (P \times P) \, b)$.

Si $a \, \Delta \, b$ alors $b \, \Delta \, a$ car $((a = b) \Rightarrow (b = a)$ l'égalité est symétrique sur E)

$(b \, \Delta \, a) \Rightarrow (b \Delta \cup (P \times P)) \, a$ car $\Delta \subset \Delta \cup (P \times P)$.

Si $a \, (P \times P) \, b$: alors $b (P \times P) \, a$ par définition de $P \times P$ car :

$(a \, (P \times P) b) \Leftrightarrow ((a,b) \in P \times P) \Leftrightarrow (a \in P$ et $b \in P)$.

$(b \, (P \times P) \, a) \Rightarrow (b \, \Delta \cup (P \times P) \, a)$ car $(P \times P) \subset \Delta \cup (P \times P)$

Finalement : $(a \, \Delta \cup (P \times P) \, b) \Rightarrow (b \, \Delta \cup (P \times P) \, a)$ et par suite : $\Delta \cup (P \times P)$ est symétrique.

- $\forall (a,b,c) \in E^3$:$[a \, \Delta \cup (P \times P) b$ et $b \, \Delta \cup (P \times P) \, c] \Rightarrow [a \, \Delta \cup (P \times P) \, c]$

car $(a \, \Delta \cup (P \times P) \, b) \Leftrightarrow (a \, \Delta \, b$ ou $a (P \times P) b)$

$(b \, \Delta \cup (P \times P) \, c) \Leftrightarrow (b \, \Delta \, c$ ou $b (P \times P) \, c)$.

Quatre cas se posent :

1)

$(a\ \Delta\ b$ et $b\Delta\ c) \Leftrightarrow (a = b$ et $b = c) \Rightarrow (a = c) \Rightarrow (a\ \Delta\ c)$.

donc $(a\ \Delta\ b$ et $b\ \Delta\ c) \Rightarrow (a\ \Delta\ c) \Rightarrow (a\ \Delta \cup (P\times P)\ c)$ $(\Delta \subset \Delta \cup (P\times P))$.

2)

$[a\ \Delta\ b$ et $b(P\times P)\ c] \Leftrightarrow [(a = b)$ et $(b,c) \in (P\times P)] \Rightarrow ((a,c) \in P\times P)$ car $a = b$.

$((a,c) \in (P\times P)) \Rightarrow ((a,c) \in \Delta \cup (P\times P))$ (car $(P\times P) \subset \Delta \cup (P\times P)$).

3)

$[a\ (P\times P)\ b$ et $b\ \Delta\ c] \Leftrightarrow [(a,b) \in (P\times P)$ et $b = c] \Rightarrow [(a,b) \in (P\times P)]$ car $b = c$.

$((a,b) \in (P\times P)) \Rightarrow ((a,c) \in \Delta \cup (P\times P))$ $[$car $(P\times P) \subset \Delta \cup (P\times P)]$

4)

$[a\ (P \times P)\ b$ et $(b,c) \in P\times P] \Leftrightarrow [(a,b) \in P \times P$ et $(b,c) \in P\times P] \Leftrightarrow [(a,b,c) \in P^3]$

$[(a,b) \in P \times P$ et $(b,c) \in P\times P] \Leftrightarrow [(a,b,c) \in P^3] \Rightarrow ((a,c) \in P\times P) \Leftrightarrow (a\ (P \times P)\ c)$.

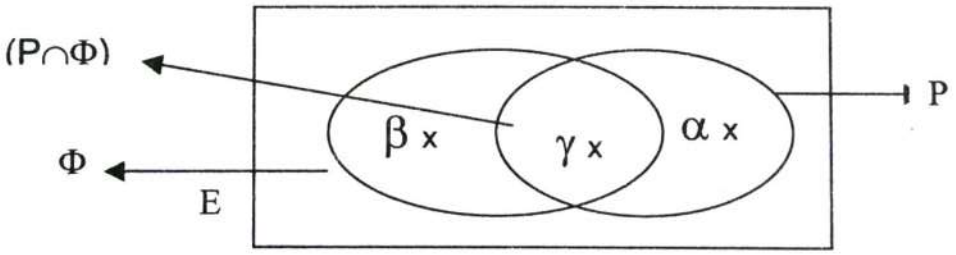
$((a,c) \in (P\times P)) \Rightarrow ((a,c) \in \Delta \cup (P\times P))$ $[$car $(P\times P) \subset \Delta \cup (P\times P)]$

donc $\forall (a,b,c) \in E^3 : [a\ \Delta \cup (P\times P)\ b$ et $b\ \Delta \cup (P\times P)\ c] \Rightarrow (a\ \Delta \cup (P\times P) c)$

et par suite $\Delta \cup (P\times P)$ est transitive.

$[\Delta \cup (P\times P)$ réflexive, symétrique, transitive$] \Leftrightarrow [\Delta \cup (P\times P)$ est une relation d'équivalence sur E].

2. On a le schéma suivant :



Soient : $\alpha \in P-\Phi$, $\beta \in \Phi-P$, $\gamma \in P\cap\Phi$.

$\alpha(P\times P)\ \gamma$ (car$(\alpha, \gamma) \in P\times P$) donc $\alpha\ \Delta \cup (P\times P)\ \delta$ $[$car $(P\times P) \subset \Delta \cup (P\times P)]$

$\beta\ (\Phi\times\Phi)\gamma$ car $(\gamma,\beta) \in \Phi\times\Phi)$ donc $\gamma\Delta \cup (\Phi\times\Phi)\ \beta$ $[$car $(\Phi\times\Phi) \subset \Delta \cup (\Phi\times\Phi)]$

Mais : $(\alpha,\beta) \notin \Delta \cup (P\times P)$ car $\alpha \neq \beta$ et $(\alpha,\beta) \notin P\times P$

$(\alpha,\beta) \notin \Delta \cup (\Phi\times\Phi)$ car $\alpha \neq \beta$ et $(\alpha,\beta) \notin \Phi\times\Phi$.

Donc $\alpha[[\Delta \cup (P\times P)] \cup [\Delta \cup (\Phi\times\Phi)]]\ \beta$
et donc $\Delta \cup (P\times P) \cup \Delta \cup (\Phi\times\Phi)$ n'est pas **transitive** .

3. Montrons que $(R_1 . R_2)^{-1} \subset R_2^{-1} . R_1^{-1}$:

$((a,b) \in (R_1 . R_2)^{-1}) \Leftrightarrow ((b,a) \in R_1 . R_2)$

$((b,a) \in R_1 . R_2) \Leftrightarrow (\exists c \in E : b R_2 c \text{ et } c R a) \Leftrightarrow (a R_1^{-1} c \text{ et } c R_2^{-1} b) \Leftrightarrow ((a,b) \in R_2^{-1} . R_1^{-1})$

donc $(R_1 . R_2)^{-1} \subset R_2^{-1} . R_1^{-1}$ .....(1)

montrons à présent que : $R_2^{-1} . R_1^{-1} \subset (R_1 . R_2)^{-1}$:

$(\forall (a,b) \in R_2^{-1} . R_1^{-1}) \Leftrightarrow (\exists c \in E : a R_1^{-1} c \text{ et } c R_2^{-1} b) \Leftrightarrow [c R a \text{ et } b R_2 c] \Leftrightarrow (b R_1 R_2 a)$

$(b R_1 . R_2 a) \Leftrightarrow ((b,a) \in R_1 . R_2) \Leftrightarrow ((a,b) \in (R_1 . R_2))$

donc $R_2^{-1} . R_1^{-1} \subset (R_1 . R_2)^{-1}$.....(2)

$[(1) \text{ et } (2)] \Leftrightarrow [(R_1 . R_2)^{-1} = R_2^{-1} . R_1^{-1}]$

II.

1. Considérons $R_1 = \Delta \cup (\Phi\times\Phi)$ et $R_2 = \Delta\ (P\times P)$

P et Φ vérifient les conditions énoncées dans la partie I c'est à dire : $P \not\subset \Phi$, $\Phi \not\subset P$, $P \cap \Phi \neq \phi$

$\forall \alpha \in P-\Phi, \forall \beta \in \Phi - P, \exists \gamma \in P \cap \Phi : \alpha\ \Delta \cup (P\times P)\ \gamma$ et $\gamma\ \Delta \cup (\Phi\times\Phi)\ \beta$.

Et donc $\alpha\ \Delta \cup (\Phi\times\Phi) . \Delta \cup (P\times P)\ \beta$

Mais $[\beta\ \Delta \cup (\Phi\times\Phi) . \Delta \cup (P\times P)\ \alpha] \Leftrightarrow [\gamma = \beta \text{ et } \gamma = \alpha] \Leftrightarrow (\alpha = \beta)$

Absurde car $\alpha \in P-\Phi$ et $\beta \in \Phi - P$ ($\gamma = \beta$ car $\beta \notin P$, $\gamma = \alpha$ car $\alpha \notin \Phi$)

Donc $(\alpha R_1 . R_2 \beta) \Rightarrow (\beta R_1 . R_2\ \alpha)$ et par suite $R_1 . R_2$ est non symétrique.

2.

a. $[R_1$ réflexive et R_2 réflexive$] \Rightarrow (R_1 . R_2$ réflexive).

Car $\forall x \in E$: on a $(x\ R_2 x$ et $x R_1 x) \Rightarrow (x R_1 . R_2 x)$ donc $R_1 . R_2$ réflexive.

b. Remarquons que R_1 et R_2 étant réflexives et transitives

on a : $R_1 . R_1 = R_1$ et $R R_2 . R_2 = R_2$

car $\left.\begin{array}{l}(R_1 \text{ réflexive}) \Rightarrow (R_1 \subset R_1 . R_1) \\ (R_1 \text{ transitive}) \Leftrightarrow (R_1 . R_1 \subset R_1)\end{array}\right\} \Rightarrow R_1 = R_1 . R_1$

Le même raisonnement pour R_2 mène à $R_2 = R_2 . R_2$.

[Voir exercice 3. 2ème question , exercice 4.2ème question , section I]

Montrons que $(R_1 . R_2 = R_2 . R_1) \Leftrightarrow [(R_1 . R_2).(R_1 . R_2) = R_1 . R_2]$

On a : $(R_1 . R_2).(R_1 . R_2) = (R_1 . R_2).(R_2 . R_1)$ car $(R_1 . R_2 = R_2 . R_1)$

$(R_1 . R_2).(R_2 . R_1) = R_1.(R_2 . R_2). R_1 = R_1 . R_2 . R_1 = (R_1 . R_2). R_2 = R_1 . R_2$

car : $R_1 . R_1 = R_1$ et $R_2 . R_2 = R_2$

[La composition des relations sur E est associative]

donc $(R_1 . R_2 = R_2 . R_1) \Leftrightarrow [(R_1 . R_2).(R_1 . R_2) = R_1 . R_2] \Leftrightarrow (R_1 . R_2$ transitive et réflexive).

Et par suite : $(R_1 . R_2 = R_2 . R_1) \Leftrightarrow (R_1 . R_2$ transitive et réflexive).

Il reste à prouver : $(R_1 . R_2 = R_2 . R_1) \Leftrightarrow ((R_1 . R_2)^{-1} = R_1 . R_2 = R_2 . R_1)$

En effet : $(R_1 . R_2 = R_2 . R_1) \Leftrightarrow ((R_1 . R_2)^{-1} = (R_2 . R_1)^{-1} = R_2^{-1} . R_1^{-1} = R_1^{-1} . R_2^{1} = R_2 . R_1 = R_1 . R_2)$

Donc $[(R_1 . R_2)^{-1} = R_1 . R_2] \Leftrightarrow (R_1 . R_2$ est symétrique). .....(2)

Dans ces deux équivalences (1) et (2) il a été tenu compte de la réflexivité, transitivité et la symétrie des deux relations R_1 et R_2 ($R_1 . R_1 = R_1$, $R_2 . R_2 = R_2$ et $R_1^{-1} = R_1$, $R_2^{-1} = R_2$)

Finalement on a : $(R_1 . R_2 = R_2 . R_1) \Leftrightarrow (R_1 . R_2$ est une relation d'équivalence définie sur E).

Exercice 5 :

Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles non vides indexée par I et $(R_i)_{i \in I}$ une famille de relations

d'équivalence telle que : $\forall i \in I$: R_i est définie sur E_i

1. Montrer que la relation R définie sur $\prod_{I\in I} E_i$ par $[(x_i)_{i\in I}\ R\ (y_i)_{i\in I}] \Leftrightarrow [\forall i\in I : x_i\ R_i\ y_i]$ est une relation d'équivalence définie sur $\prod_{I\in I} E_i$.

2. Exhiber une bijection b de $(\prod_{I\in I} E_i) / R$ sur $\prod_{I\in I} (E_i / R_i)$.

Solution :

1. on a :

$[\forall i\in I : R_i$ réflexive$] \Leftrightarrow [\forall i\in I : \forall x_i\in E_i : x_i\ R_i\ x_i]$

$[\forall i\in I :. x_i\ R_i\ x_i] \Leftrightarrow [(x_i)_{i\in I}\ R\ (x_i)_{i\in I}]$ et par suite R est réflexive.

$[\forall i\in I : R_i$ est symétrique $] \Leftrightarrow [\forall i\in I, \forall (x_i,y_i)\in E_i^2\ (x_i\ R_i\ y_i) \Rightarrow (y_i\ R_i\ x_i)]$

$[\forall i\in I, \forall (x_i,y_i)\in E_i^2\ (x_i\ R_i\ y_i) \Rightarrow (y_i\ R_i\ x_i)] \Leftrightarrow [(x_i)_{i\in I}\ R\ (y_i)_{i\in I}] \Rightarrow ((y_i)_{i\in I}\ R\ (x_i)_{i\in I})$

et par suite R est symétrique.

$[\forall i\in I : R_i$ est transitive$] \Leftrightarrow [\forall i\in I, (x_i,y_i,z_i)\in E_i^3\ (x_i\ R_i\ y_i)$ et $(y_i\ R_i\ z_i) \Rightarrow (x_i\ R_i\ z_i)]$

$[\forall i\in I : R_i$ est transitive$] \Leftrightarrow [(x_i)_{i\in I}\ R\ (y_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}\ R\ (z_i)_{i\in I} \Rightarrow (x_i)_{i\in I}\ R\ (z_i)_{i\in I}]$

et par suite R est transitive.

[R est réflexive, symétrique, transitive sur $\prod_{i\in I} E_i] \Leftrightarrow$ [R est une relation d'équivalence définie sur $\prod_{i\in I} E_i$].

2. **b** : $(\prod_{i\in I} E_i)/R \rightarrow \prod_{i\in I} (E_i/R_i)$

$$cl(x_i)_{i\in I} \rightarrow \prod_{i\in I} cl(x_i)$$

où $cl(x_i)_{i\in I}$ est la classe suivant R de $(x_i)_{i\in I}$.

et $cl(x_i)$ est la classe suivant R_i de $x_i\in E_i$

b est surjective par construction .....(*)

Montrons que b est injective :

$[b(x_i)_{i\in I} = b(y_i)_{i\in I}] \Leftrightarrow [\prod_{i\in I} (cl(x_i)) = \prod_{i\in I} (cl(y_i))] \Leftrightarrow [\forall i\in I : cl(x_i) =$

$cl(y_i)] \Leftrightarrow [\forall i\in I : x_i\ R_i\ y_i]$

$[\forall i\in I : x_i\ R_i\ y_i] \Leftrightarrow [(x_i)_{i\in I}\ R\ (y_i)_{i\in I}] \Leftrightarrow [cl(x_i)_{i\in I} = cl(y_i)_{i\in I}]$

donc b est injective.....(**)

(b est surjective et b est injective) $\Leftrightarrow$ (b est bijective)

Exercice 6 :

Soient E un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur E .on dit qu'une partie S de E est saturée par la relation $\mathcal{R}$ si et seulement si $\forall x \in S$: $cl(x) \subset S$. On appelle partie saturée engendrée par une partie A de E et on note Sat(A) la plus petite partie saturée de E contenant A.

1. Montrer que $Sat(A) = \bigcup_{x \in A} cl(x)$

2. $\mathcal{R}$ étant la relation d'équivalence associée à l'application $f : E \to F$ (voir exercice 1 section II).

Montrer l'équivalence : (S saturée par $\mathcal{R}$)$\Leftrightarrow$ $(f^{-1}[f(S)]=S)$.

3. A étant une partie de E, déterminer Sat(A) pour la relation $\mathcal{R}$ définie en 2.

4. Exhiber une bijection entre les parties saturées de E et les parties de $f(E)$ pour la relation $\mathcal{R}$ définie en 2.

Solution :

Appelons P.S.A l'ensemble des parties saturées de E contenant A.

Remarquons alors que $Sat(A) = \bigcap_{P \in PSA} P$ c'est à dire l'intersection de toutes les parties saturées de E contenant A.

montrons d'abord que $\bigcup_{x \in A} cl(x) \in PSA$:

- Montrons que $A \subset \bigcup_{x \in A} cl(x)$.

soit $x \in A$, $x \in cl(x)$ alors $x \in \bigcup_{x \in A} cl(x)$ donc $A \subset \bigcup_{x \in A} cl(x)$

- Montrons que $\bigcup_{x \in A} cl(x)$ est saturée par R.

$(\alpha \in \bigcup_{x \in A} cl(x)) \Leftrightarrow (\exists x_0 \in A : \alpha \in cl(x_0) \subset \bigcup_{x \in A} cl(x))$

$(\alpha \in cl(x_0)) \Leftrightarrow (cl(\alpha) = cl(x_0))$ donc $cl(\alpha) \subset \bigcup_{x \in A} cl(x)$

et par suite $\bigcup_{x \in A} cl(x)$ est une partie saturée de E par $\mathcal{R}$.

$[A \subset \bigcup_{x \in A} cl(x)$ et $\bigcup_{x \in A} cl(x)$ est saturée$] \Leftrightarrow (\bigcup_{x \in A} cl(x) \in PSA)$.

Il est évident que $\bigcap_{P \in PSA} P \subset \bigcup_{x \in A} cl(x)$ .....(*)

Car $\bigcup_{x \in A} cl(x) \in PSA$.

- Prouvons que $\bigcup_{x \in A} cl(x) \subset \bigcap_{P \in PSA} P$.

On à : $\forall x \in \bigcap_{P \in PSA} P : cl(x) \subset \bigcap_{P \in PSA} P$.

Car $(x \in \bigcap_{P \in PSA} P) \Leftrightarrow (\forall P \in PSA : x \in P)$.

$\forall P \in PSA : (x \in P \in PSA) \Rightarrow (cl(x) \subset P)$, donc $\forall x \in \bigcap_{P \in PSA} P : cl(x) \subset \bigcap_{P \in PSA} P$

[Ce résultat montre que l'intersection d'éléments de PSA est un élément de PSA]

Comme $\forall P \in PSA : A \subset P$ alors $A \subset \bigcap_{P \in PSA} P$.

Et par suite : $\bigcup_{x \in A} cl(x) \subset \bigcup_{x \in \bigcap_{P \in PSA} P} cl(x) \subset \bigcap_{P \in PSA} P$.

Car pour chaque x de $\bigcap_{P \in PSA} P : cl(x) \subset \bigcap_{P \in PSA} P$.

Donc $\bigcup_{x \in A} cl(x) \subset \bigcap_{P \in PSA} P$ .....(**)

$[(*) \text{ et } (**)] \Leftrightarrow [\bigcup_{x \in A} cl(x) = \bigcap_{P \in PSA} P = Sat(A)]$

2.

$\forall x \in S : cl(x) = \{y \in E : f(x) = f(y)\} = \{y \in E : y \in f^{-1}\{f(x)\}$ donc $cl(x) = f^{-1}\{f(x)\}$

Montrons d'abord que : (S saturée par $\mathcal{R}$) $\Rightarrow (f^{-1}[f(S)] = S)$.

- (S saturée par $\mathcal{R}$) $\Leftrightarrow (\forall x \in S : f^{-1}\{f(x)\} \subset S) \Rightarrow (\bigcup_{x \in S} f^{-1}\{f(x)\} \subset \bigcup_{x \in S} S = S)$

donc $f^{-1}[f(S)] \subset S$ ....(1) car $\bigcup_{x \in S} f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}[\bigcup_{x \in S}\{f(x)\}] = f^{-1}[f(s)]$ $(\bigcup_{x \in S}\{f(x)\} = f(s))$.

Il est évident que : $\forall S : S \subset f^{-1}[f(S)]$...(2) (même si S n'est pas saturée par $\mathcal{R}$).

(1) et (2) donnent :[S saturée par $\mathcal{R}$] $\Rightarrow (f^{-1}[f(S)] = S)$

Réciproquement : Montrons que : $(f^{-1}[f(S)] = S) \Rightarrow$ (S saturée par $\mathcal{R}$)

$\forall x \in S$ on a : $cl(x) = f^{-1}\{f(x)\} \subset f^{-1}[f(S)] = S$.

donc $[\forall x \in S : cl(x) \subset S] \Leftrightarrow$ (S saturée par $\mathcal{R}$)

et par suite : $(f^{-1}[f(S)] = S) \Rightarrow$ (S saturée par $\mathcal{R}$)

3.

$$Sat(A) = \bigcup_{x \in A} cl(x) = \bigcup_{x \in A} f^{-1}\{f(x)\} = f^{-1}[\bigcup_{x \in A}\{f(x)\}] = f^{-1}[f(A)] \text{ car } \bigcup_{x \in A}\{f(x)\} = f(A).$$

donc : $Sat(A) = f^{-1}[f(A)]$

➲ remarque :

pour A saturée par $\mathcal{R}$, $f^{-1}[f(A)] = A$ et par suite : Sat (A) = A

4.

Soit $F : PSE \to f(A)$ où PSE est l'ensemble des parties saturées de E par la relation $\mathcal{R}$

$S \to f(S)$

$(S \subset E) \Rightarrow (f(S) \subset f(E))$.

- Montrons que F est surjective

Soit $P \in f(E)$; $P = \bigcup_{y \in P}\{y\}$

On a : $\forall y \in P\ \exists x \in E : y = f(x)$ $[(y = f(x)) \Leftrightarrow (x \in f^{-1}\{y\})]$.

$f^{-1}(P) = f^{-1}\{\bigcup_{y \in P}\{y\}\} = \bigcup_{y \in P} f^{-1}\{y\}$

posons $S = \bigcup_{y \in P} f^{-1}\{y\}$ alors $F(S) = f(S) = f(\bigcup_{y \in P} f^{-1}\{y\}) = \bigcup_{y \in P} f(f^{-1}\{y\}) = \bigcup_{y \in P}\{y\} = P$

car $\forall y \in P : f(f^{-1}\{y\}) = \{y\}$.

donc $\forall P \subset f(E)$; P a pour antécédant par F l'ensemble $S = \bigcup_{y \in P} f^{-1}\{y\}$

Il reste à prouver que S est saturée par $\mathcal{R}$:

Soit $x \in S$ alors $cl(x) = f^{-1}\{f\{x\}\}$.

Posons $f(x) = y$ alors $\{y\} \subset f(E)$. $cl(x) = f^{-1}(y)$.

d'autre part : $(x \in S) \Leftrightarrow (x \in \bigcup_{y \in P} f^{-1}\{y\}) \Leftrightarrow (\exists y \in P : x \in f^{-1}(y)) \Leftrightarrow (f^{-1}(x) = y)$

Donc $cl(x) = f^{-1}(y)$ avec $y \in P$ donc $cl(x) \subset \bigcup_{y \in P} f^{-1}\{y\}$

Et par suite : S est saturée par $\mathcal{R}$

Finalement :toute partie P de $f(E)$ admet par F au moins un antécédant dans PSE

Où $S = \bigcup_{y \in P} f^{-1}\{y\}$; F est donc surjective

- Prouvons à présent que F est injective, pour $S_1, S_2 \in PSE$:$F(S_1) = F(S_2)$

$(F(S_1)=F(S_2)) \Rightarrow (f(S_1)=f(S_2))$

$(f(S_1)=f(S_2)) \Rightarrow (f^{-1}f(S_1)=f^{-1}f(S_2)) \Leftrightarrow (S_1=S_2)$ car $S_1,S_2 \in PSE$ (voir 2ème question).

Donc $(F(S_1)=F(S_2)) \Rightarrow (S_1=S_2)$ et par suite F est injective

(F surjective et F injective) $\Leftrightarrow$ (F bijective).

Exercice 7 :

E étant un ensemble non vide et $\mathcal{R}$ une relation définie sur E .

On dit que $\mathcal{R}$ est connexe si et seulement si $\mathcal{R} \cup \mathcal{R}^{-1} \cup \Delta = E^2$.

C'est à dire :$\forall (x,y) \in E^2$: $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$ ou $x=y$.

1. On considère $\mathcal{R}$ symétrique et réflexive telle que : $\mathcal{R} \neq E^2$

Montrer que $\mathcal{R}$ n'est pas connexe .

2. On suppose que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

Montrer que $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R} = \mathcal{R}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*-\{1\}$ et soit la relation de congruence modulo n définie sur $\mathbb{Z}$ i-e :

$(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow ((x - y) \in n\mathbb{Z})$.

Montrer que :

a. $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}.\mathcal{R} = \mathcal{R}$

b. $\mathcal{R}$ n'est pas connexe.

Solution :

1. ($\mathcal{R}$ non connexe) $\Leftrightarrow (\exists (x,y) \in E^2 : x \not\mathcal{R} y,\ y \not\mathcal{R} x$ et $x \neq y)$.

on a : ($\mathcal{R} \neq E^2$)$\Leftrightarrow$ ($\exists(x,y)\in E^2$:x $\mathcal{R}$ y).

(x $\not\mathcal{R}$ y) $\Rightarrow$ (x $\neq$ y) car si x = y alors on aurait x $\mathcal{R}$ y (car $\mathcal{R}$ est réflexive) on a donc :

$\exists(x,y)\in E^2$:x $\not\mathcal{R}$ y et x $\neq$y mais (y $\not\mathcal{R}$ x) $\Rightarrow$ (x $\not\mathcal{R}$ y) car Si y $\mathcal{R}$ x alors x $\mathcal{R}$ y ($\mathcal{R}$ est symétrique)

Finalement : $\exists(x,y)\in E^2$:x $\not\mathcal{R}$ y, y $\not\mathcal{R}$ x, x $\neq$ y donc $\mathcal{R}$ est non connexe .

2. On a :

($\mathcal{R}$ réflexive) $\Rightarrow$($\mathcal{R} \subset \mathcal{R}.\mathcal{R}$)

($\mathcal{R}$ transitive)$\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}.\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$).

donc pour $\mathcal{R}$ réflexive et transitive (ce qui est le cas pour une relation d'équivalence)

on obtient : $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}.\mathcal{R} = \mathcal{R}$

(voir exercice 3. 2ème question ,exercice 4. 2ème question section 1)

3.

a. On a :$\forall x\in Z$ (x-x) = 0$\in$ nZ (0 = 0$\times$n) ; $\mathcal{R}$ réflexive.

($\forall x,y,z)\in Z^3$ (x-y)$\in$nZ et (y-z) $\in$nZ) $\Rightarrow$ [(x-y)+(y-z)=(x-z)$\in$nZ] ; $\mathcal{R}$ transitive.

$\mathcal{R}$ transitive et réflexive alors $\mathcal{R}^2 = \mathcal{R}.\mathcal{R} = \mathcal{R}$ (voir 2ème question).

b. $\mathcal{R}$ est non connexe

Les nombres n et n+1 sont tels que :n-(n+1)$\notin$ nZ,((n+1)-n) $\notin$ nZ, n $\neq$ n+1.

donc $\mathcal{R}$ est non connexe.

➲ remarque :

La relation définie en 3. est aussi symétrique car [(x-y)$\in$nZ] $\Rightarrow$ [(y-x)$\in$nZ] aussi.

CHAPITRE R SECTION 3

Relations d'ordre

(10 Exercices, 37 Questions)

- ☐ Eléments remarquable (Majorantes, Minorants, bornes supérieures, bon inférieure, éléments maximale, élément minimal, Max mum, Minimum).
- ☐ Relation d'ordre.
- ☐ Ordre partiel – ordre total – ordre complet – bon ordre – ordre filtrant.

Exercice 1 :

Soient $(E,\underline{\alpha}_1)$, $(F,\underline{\alpha}_2)$ deux ensembles ordonnés par $\underline{\alpha}_1$ et $\underline{\alpha}_2$

On définit sur $E \times F$ les relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ par :

$[(x,y)\ \mathcal{R}_1\ (x',y')] \Leftrightarrow (x\ \underline{\alpha}_1 x'$ et $y\ \underline{\alpha}_2\ y')$

$[(x,y)\ \mathcal{R}_2\ (x',y')] \Leftrightarrow (x\ \alpha_1 x'$ ou $[x = x'$ et $y\ \underline{\alpha}_2 y'])$

1. montrer que $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont deux relations d'ordre définies sur $E \times F$
2. les ordres $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sont-ils partiels ou totaux

Solution :

1.

a). montrons que $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre définie sur $E \times F$:

- on a : $\forall (x,y) \in E \times F : (x\ \underline{\alpha}_1 x$ et $y\ \underline{\alpha}_2 y)$ car $\underline{\alpha}_1$ et $\underline{\alpha}_2$ sont réfléxives.

$(x\ \underline{\alpha}_1 x$ et $y\ \underline{\alpha}_2 y) \Leftrightarrow ((x,y)\ \mathcal{R}_1\ (x,y))$ et par suite $\mathcal{R}_1$ est réfléxive.

- Soient $(x,y) \in E \times F$, $(x',y') \in E \times F$: $(x,y)\ \mathcal{R}_1\ (x',y')$ et $(x',y')\ \mathcal{R}_1\ (x,y)$

$$\begin{pmatrix} (x,y)\ \mathcal{R}_1\ (x',y') \\ \text{et} \\ (x',y')\ \mathcal{R}_1\ (x,y) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} x\ \underline{\alpha}_1 x' \\ \text{et} \\ x'\underline{\alpha}_1 x \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} y\ \underline{\alpha}_2 y' \\ \text{et} \\ y'\ \underline{\alpha}_2 y \end{pmatrix} \right)$$

mais : $(x\ \underline{\alpha}_1 x'$ et $x'\underline{\alpha}_1 x) \Rightarrow (x = x')$ car $\underline{\alpha}_1$ est antisymétrique.

$(y\ \underline{\alpha}_2 y'$ et $y'\underline{\alpha}_2 y) \Rightarrow (y = y')$ car $\underline{\alpha}_2$ est antisymétrique.

Donc $(x = x'$ et $y = y') \Leftrightarrow ((x,y) = (x',y'))$

$[(x,y)\ \mathcal{R}_1\ (x',y')$ et $(x',y')\ \mathcal{R}_1\ (x,y)] \Rightarrow ((x,y) = (x',y'))$ et par suite $\mathcal{R}_1$ est antisymétrique.

Soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in E \times F$: $(x,y)\ \mathcal{R}_1\ (x',y')$ et $(x',y')\ \mathcal{R}_1\ (x'',y'')$

$((x,y)\ \mathcal{R}_1\ (x',y')) \Leftrightarrow (x\ \underline{\alpha}_1 x'$ et $y\ \underline{\alpha}_2\ y')$

$((x',y')\ \mathcal{R}_1\ (x'',y'')) \Leftrightarrow (x'\ \underline{\alpha}_1 x''$ et $y'\ \underline{\alpha}_2\ y'')$

$(x\ \underline{\alpha}_1 x'$ et $x'\ \underline{\alpha}_1 x'') \Rightarrow (x\ \underline{\alpha}_1 x'')$ car $\underline{\alpha}_1$ est transitive

$(y \underline{\alpha}_2 y' \text{et } y' \underline{\alpha}_2 y'') \Rightarrow (y \underline{\alpha}_2 y'')$ car $\underline{\alpha}_2$ est transitive

$((x \underline{\alpha}_1 x'' \text{et } y \underline{\alpha}_2 y'') \Leftrightarrow ((x,y) \mathcal{R}_1 (x'',y''))$ et par suite $\mathcal{R}_1$ est transitive

finalement: $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre définie sur E×F.

b) montrons que $\mathcal{R}_2$ est une relation d'ordre définie sur E×F :

- on a : $\forall x \in E : x = x$ et $\forall y \in E : y \underline{\alpha}_2 y$

donc $\forall (x,y) \in E \times F : (x,y) \mathcal{R}_2 (x,y)$ et par suite $\mathcal{R}_2$ est réfléxive.

- Soient $(x,y) \in E \times F$, $(x',y') \in E \times F : (x,y) \mathcal{R}_2 (x',y')$ et $(x',y') \mathcal{R}_2 (x,y)$

$((x,y) \mathcal{R}_2 (x',y')) \Leftrightarrow (x \alpha_1 x' \text{ ou } [x = x' \text{ et } y \underline{\alpha}_2 y'])$

$((x',y') \mathcal{R}_2 (x,y)) \Leftrightarrow (x' \alpha_1 x \text{ ou } [x' = x \text{ et } y' \underline{\alpha}_2 y])$

Le cas : $x \alpha_1 x' \text{et } x' \alpha_1 x$ ne peut se produire car :

$(x \alpha_1 x' \text{et } x' \alpha_1 x) \Leftrightarrow (x \underline{\alpha}_1 x' \text{et } x' \underline{\alpha}_1 x \text{ et } x \neq x') \Leftrightarrow (x' = x \text{ et } x \neq x')$ absurde!

Le cas : $x' \alpha_1 x$ et $[x = x'$ et $y' \underline{\alpha}_2 y]$ ne peut se produire également car :

$(x \alpha_1 x') \Rightarrow (x \neq x')$ et donc $x' = x$ et $y' \underline{\alpha}_2 y$ ne peut avoir lieu et par conséquent

$x \alpha_1 x'$ et $[x = x'$ et $y' \underline{\alpha}_2 y]$ ne peut avoir lieu aussi.

Le cas : $x' \alpha_1 x$ et $[x = x'$ et $y \underline{\alpha}_2 y']$ ne peut avoir lieu pour les même raisons précedentes.

Finalement, il ne reste que le cas :

$[x = x' \text{ et } y \underline{\alpha}_2 y'] \text{et } [x = x' \text{et } y' \underline{\alpha}_2 y] \Leftrightarrow [x = x' \text{ et } y \underline{\alpha}_2 y' \text{et } y' \underline{\alpha}_2 y] \Leftrightarrow [x = x' \text{ et } y = y']$

car $\underline{\alpha}_2$ est antisymétrique.

$[x = x' \text{ et } y = y'] \Leftrightarrow (x,y) = (x',y')$. et par suite $\mathcal{R}_2$ est antisymétrique.

- Soient $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in E \times F : (x,y) \mathcal{R}_2 (x',y')$ et $(x',y') \mathcal{R}_2 (x'',y'')$

$((x,y) \mathcal{R}_2 (x',y')) \Leftrightarrow (x \alpha_1 x' \text{ ou } [x = x' \text{ et } y \underline{\alpha}_2 y'])$

$((x',y') \mathcal{R}_2 (x'',y'')) \Leftrightarrow (x' \alpha_1 x'' \text{ ou } [x' = x'' \text{ et } y' \underline{\alpha}_2 y''])$

Le cas : $(x \alpha_1 x' \text{ et } x' \alpha_1 x'') \Rightarrow ((x \alpha_1 x'') \text{ et } (x \alpha_1 x'')) \Rightarrow ((x,y) \mathcal{R}_2 (x'',y''))$

Le cas : $(x\ \alpha_1 x'$ et $[x' = x''$ et $y'\ \underline{\alpha}_2 y''])\Leftrightarrow(x\ \underline{\alpha}_1 x''$ et $y'\ \underline{\alpha}_2 y'')\Rightarrow((x,y)\ \mathcal{R}_2\ (x'',y''))$

car

$x\ \underline{\alpha}_1 x''$ est vraie.

Le cas : $(x\ \alpha_1 x'$ et $[x = x'$ et $y\ \underline{\alpha}_2 y'])\Leftrightarrow(x\ \alpha_1 x'$ et $y\ \underline{\alpha}_2 y')\Rightarrow((x,y)\ \mathcal{R}_2$ $(x',y'))$ pour la même raison précedente.

Le cas : $[x = x'$ et $y\ \underline{\alpha}_2 y']$ et $[x' = x''$ et $y'\ \underline{\alpha}_2 y'']\Leftrightarrow[x = x'$et $x' = x'']$ et $[y\ \underline{\alpha}_2 y'']$ car $\underline{\alpha}_2$ est transitive.

$([x = x'$et $x' = x'']$ et $[y\ \underline{\alpha}_2 y''])\Leftrightarrow[x = x''$et $y\ \underline{\alpha}_2 y'']\Rightarrow((x,y)\ \mathcal{R}_2\ (x'',y''))$ car $x = x''$ est vraie.

$[(x,y)\ \mathcal{R}_2\ (x',y')$ et $(x',y')\ \mathcal{R}_2\ (x'',y'')]\Rightarrow((x,y)\ \mathcal{R}_2\ (x'',y''))$

et par suite $\mathcal{R}_2$ est une $\mathcal{R}$ elation transitive

finalement: $\mathcal{R}_2$ est une relation d'ordre définie sur ExF.

2.

- $\mathcal{R}_1$ est une relation d'ordre partiel définie sur ExF :

Les couples (a,b) et (a',b') de ExF tels que : $a\alpha_1 a'$ et $b\alpha_2 b'$ ne sont pas comparables car :

$b\not\underline{\alpha}_2 b'$ car si $b\underline{\alpha}_2 b'$on aurait alors $b = b'$ en contradiction avec $b'\alpha_2 b$ (ie : $b\underline{\alpha}_2 b'$ et $b \neq b'$).

Donc $(a,b)\ \not\mathcal{R}_1\ (a',b')$

De plus : $a'\not\underline{\alpha}_1 a$ car si $a'\underline{\alpha}_1 a$ on aurait alors $a = a'$ en contradiction avec $a\alpha_1 a'$ (ie : $a\ \underline{\alpha}_1 a'$ et $a \neq a'$).

Donc $(a',b')\ \not\mathcal{R}_1\ (a,b)$

- $\mathcal{R}_2$ est une relation d'ordre partiel définie sur ExF :

Considérons $E = F = N^*$ et $\underline{\alpha}_1 = \underline{\alpha}_2 =$ "| " dans N^* (relation de divisibilité dans N^*)

$\mathcal{R}_2$ devient alors :

$\forall(x,y) \in N^{*2}, \forall(x',y') \in N^{*2} : [(x,y)\ \mathcal{R}_2\ (x',y')]\Leftrightarrow(x|x'$ et $x \neq x'$ ou $[x = x'$et $y|y'])$

considérons les couples (3,4) et (5,7)

on a : $3\nmid 5$ et $3 \neq 5$ donc $(3,4)\ \not\mathcal{R}_2\ (5,7)$

et $5\nmid 3$ et $5 \neq 3$ donc $(5,7)\ \not\mathcal{R}_2\ (3,4)$

(3,4) et (5,7) ne sont pas comparables sur ExF

➲ **remarque :**

$\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ auraient été totaux si $\underline{\alpha}_1$ et $\underline{\alpha}_2$ l'étaient sur E et F respectivement.

Exercice 2 :

Soient E un ensemble non vide et $A \in \mathcal{P}(E)$ et soit $P = \{B \in \mathcal{P}(E) : A \subset B\}$

On munit $\mathcal{P}(E)$ de la structure d'ordre usuelle (relation d'inclusion),

1. définir l'ensemble des Minorants de P.
2. définir l'ensemble des Majorants de P.
3. déterminer Inf. P, Sup. P, Min. P et Max. P.

Solution :

1. $[X \in \mathcal{P}(E)$ est un minorant de $P] \Leftrightarrow [\forall B \in P , X \subset B]$

$\forall B \in P$ on a $A \subset B$

en particulier : $A \in P , A \subset A$

donc : $\forall B \in P : (X \subset B) \Leftrightarrow (X \subset A)$

et par suite : l'ensemble des Minorants de P est $\mathcal{P}(A)$: ensemble des parties de A

2. $[Y \in \mathcal{P}(E)$ est un majorant de $P] \Leftrightarrow [\forall B \in P , B \subset Y]$

le seul sur-ensemble Y de tous les sur-ensembles B de A est l'ensemble E en entier.

Donc E est le seul majorant de P.

3. Inf. P = A (le plus grand des Minorants de P)

   Sup. P = E (le plus petit des Majorants de P)

   Min. P = A (car A = Inf. P et $A \in P$)

   Max. P = E (car E = Sup. P et $E \in P$)

Exercice 3 :

Soit dans $\mathbb{N}^*$ la relation ''| '' définie par :

$(a|b) \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}^* : b = ka)$

1. montrer que ''| '' est une relation d'ordre partiel définie sur N^* .
2. montrer que (N^* , ''| '') est un treillis.
3. Soit A = {6,13,126}

A admet-il :

a. un Minimum

b. un Maximum

c. des éléments Minimaux.

d. des éléments Maximaux.

Solution :

1.

- On a : $\forall a \in N^* : a = 1 \times a$

Donc $\forall a \in N^* : a \mid a$ et par suite ''| '' est réflexive

- Soit $(a,b) \in N^{*2} : a \mid b$ et $b \mid a$

Alors $\exists (k_1,k_2) \in N^{*2} : b = k_1 \times a$ et $a = k_2 \times b$ (*)

Mais alors : $(b = (k_1 \times k_2) \times b) \Leftrightarrow (k_1 \times k_2 = 1)$ (car $b \neq 0$)

Dans N^* : $(k_1 \times k_2 = 1) \Leftrightarrow (k_1 = 1$ et $k_2 = 1)$

En remplaçant dans (*) k_1 et k_2 par 1on obtient

a = b ou b = a et par suite ''| '' est antisymétrique

- Soit $a,b,c \in N^* : a \mid b$ et $b \mid c$, $\exists (k_1,k_2) \in N^{*2} : b = k_1 \times a$ et $c = k_2 \times b$

Mais alors : $c = (k_1 \times k_2) \times a$ donc $a \mid c$ et par suite : $(a \mid b$ et $b \mid c) \Rightarrow (a \mid c)$

Donc ''| '' est transitive.

Finalement ''| '' est une relation d'ordre définie sur N^*

- ''| '' est une relation d'ordre partiel définie sur N^*, les éléments 3 et 5 de N^* ne sont pas comparables : $3 \nmid 5$ et $5 \nmid 3$

2. (N^* , ''| '') est un treillis si et seulement si :

$\forall (a,b) \in N^{*2}$: {a,b} admet une borne Supérieure et une borne Inférieure.

Soit $\forall (a,b) \in N^{*2}$, appelons δ leur p.g.d.c. et μ leur p.p.m.c.

- δ minore $\{a,b\}$ car $\delta \mid a$ et $\delta \mid b$

$\forall \alpha \in N^*$: $\alpha \mid a$ et $\alpha \mid b$ alors $\alpha \mid \delta$ (l'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble de leur p.g.d.c)

α minore $\{a,b\}$ aussi

donc δ est le plus grands des Minorants de $\{a,b\}$: c'est donc la borne inferieure

Inf. $\{a,b\} = \delta$

- $a \mid \mu$ et $b \mid \mu$: μ est un majorant donc de $\{a,b\}$ par la relation ''$\mid$ ''

on a aussi si $a \mid \alpha$ et $b \mid \alpha$, α majore $\{a,b\}$ et $\alpha \mid \mu$

car l'ensemble des multiples communs de a et b est l'ensemble des multiples de μ

μ est le plus petit des majorants de $\{a,b\}$ donc c'est sa borne supérieure.

μ = Sup. $\{a,b\}$

finalement : $\forall \{a,b\}$: $a,b \in N^*$: Inf. $\{a,b\} = \delta$ et μ = Sup. $\{a,b\}$

et par suite : (N^* , ''$\mid$ '') est un treillis

3.

a. $6 \nmid 13$, $13 \nmid 6$, $126 \nmid 6$ donc A n' admet pas un Minimum.

car le minimum de A s'il existait, diviserait tous les éléments de A et serait dans A.

b. $13 \nmid 126$, $126 \nmid 6$, $6 \nmid 13$ donc A n' admet pas un Maximum.

car le maximum de A s'il existait, serait divisible par tous les éléments de A et serait dans A.

- les éléments de A comparables avec 6 sont : 6 et 126 car $6 \mid 126$
- le seul élément de A comparable avec 13 est 13 lui même
- les éléments de A comparables avec 126 sont : 6 et 126 car $6 \mid 126$ et de ce fait :

c. 6 et 13 sont des éléments minimaux de A (un élément Minimal de A est le plus petit des éléments de A comparables avec lui)

d. 126 et 13 sont des éléments minimaux de A (un élément Maximal de A est le plus grands des éléments de A comparables avec lui)

➲ **remarque :**

- ne pas confondre Maximum de A (Minimum de A) et élément Maximal (élément Minimal de A).
- le Maximum de A (s'il existe) est nécessairement élément Maximal de A car il est comparable à tout les éléments de A)
- même remarque concernant le Minimum de A.
- le Maximum (Minimum) de A (s'il existe), est unique. Et les éléments Maximaux (Minimaux) de A peuvent être plusieurs.
- Pour une relation d'ordre donnée, toute partie A admet au moins un élément Maximal et un élément Minimal car chaque élément de A est comparable à lui même : ils sont uniques s'ils sont Maximum et Minimum .

Exercice 4 :

Soit $\alpha \in R^*$, on définit sur Z^2 la relation $\mathcal{R}$ par :

$[(a,b)\ \mathcal{R}\ (c,d)] \Leftrightarrow [(a-c) + \alpha\,(b-d) \geq 0]$

1. montrer que $\mathcal{R}$ est une relation de pré-ordre.

2. à qu'elle condition sur α, $\mathcal{R}$ est-elle une relation d'ordre.

3. cet ordre est-il total ?

Solution :

1. rappelons qu'une relation de pré-ordre est une relation réflexive et transitive.

- $\forall (a,b) \in Z^2$ on a $(a-a) + \alpha\,(b-b) = 0 \geq 0$

$((a-a) + \alpha\,(b-b) \geq 0) \Leftrightarrow ((a,b)\ \mathcal{R}\ (a,b))$ donc $\mathcal{R}$ est une relation réflexive.

- Soient $(a,b),(c,d),(e,f) \in Z^2$:

$((a,b)\ \mathcal{R}\ (c,d)) \Leftrightarrow ((a-c) + \alpha\,(b-d) \geq 0)$ (1)

$((c,d)\ \mathcal{R}\ (e,f)) \Leftrightarrow (c-e) + \alpha\,(d-f) \geq 0)$ (2)

en additionnant (1) et (2) membre à membre, on obtient :

$((a-e) + \alpha\,(b-f) \geq 0) \Leftrightarrow ((a,b)\ \mathcal{R}\ (e,f))$

donc $[(a,b)\ \mathcal{R}\ (c,d)$ et $(c,d)\ \mathcal{R}\ (e,f)\ ] \Rightarrow ((a,b)\ \mathcal{R}\ (e,f))$

et par suite $\mathcal{R}$ est une relation transitive.

($\mathcal{R}$ est une relation réflexive et transitive) $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}$ est une relation de pré-ordre).

3. pour que $\mathcal{R}$ relation de préordre, soit une relation d'ordre il faut qu'elle soit antisymétrique.

C'est-à-dire : $[(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{R}\,(a,b)] \Rightarrow ((a,b) = (c,d)) \Leftrightarrow (a = c$ et $b = d)$

Etudions d'abord quand $[(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{R}\,(a,b)]$ a lieu.

$((a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)) \Leftrightarrow ((a-c) + \alpha\,(b-d) \geq 0)$ (1)

$((c,d)\,\mathcal{R}\,(a,b)) \Leftrightarrow ((c-a) + \alpha\,(d-b) \geq 0)$ (2)

pour que (1) et (2) aient lieu simultanément il faut et il suffit que :

$(a-c) + \alpha\,(b-d) = 0$ (*)

$\mathcal{R}$ est donc antisymétrique si et seulement si : $((a-c) + \alpha\,(b-d) = 0) \Rightarrow (a = c$ et $b = d)$

- si α est irrationnel non nul : l'implication est réalisée car si $b \neq d$, on aurait :

$(a-c) + \alpha\,(b-d) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{a-c}{d-b} \in \phi$ contradiction avec α irrationnel $\alpha \in R-\phi$.

Donc nécessairement : $((a-c) + \alpha\,(b-d) = 0) \Rightarrow (a = c$ et $b = d)$

- si $\alpha \in \phi^* - Z^*$, α rationnel non nul non entier : $(a-c) + \alpha\,(b-d) = 0$ ne peut avoir lieu car sinon on aurait : $(a-c) = \alpha\,(b-d)$ avec $(a-c)$ entier et $\alpha\,(b-d)$ non entier.
- si $\alpha \in Z^*$, entier rationnel non nul

$(a-c) + \alpha\,(b-d) = 0$ peut avoir lieu d'une infinité de manières pour $b \neq d$.

il suffit de choisir a et c vérifiant : $(a-c) = \alpha\,(b-d)$

exemple : $\alpha = 2$, $b = 4$, $d = 3$ alors $\alpha\,(b-d) = 2$

il existe plusieurs entiers tels que : $a-c = -2$ mais $a \neq c$

donc pour $\alpha \in Z^*$, $\exists\,(a,b),(c,d) \in Z^2$: $[(a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d)$ et $(c,d)\,\mathcal{R}\,(a,b)] \Rightarrow ((a,b)\,\mathcal{R}\,(c,d))$ mais $a \neq c$ et $b \neq d$ et par suite $\mathcal{R}$ n'est pas une relation antisymétrique

conclusion : pour que $\mathcal{R}$ soit une relation antisymétrique et donc une relation d'ordre il faut que α ne soit pas entier.($\alpha \in R^*-Z$)

3. pour $\alpha \in R^*-Z$, $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre total car :

$\forall(a,b,c,d) \in Z^4$: $(a-c) + \alpha\,(b-d) \geq 0$ ou $(c-a) + \alpha\,(d-b) \geq 0$

car : $[(a-c) + \alpha\,(b-d)]$ et $[(c-a) + \alpha\,(d-b)]$ sont symétriques.

Exercice 5 :

Soit E un ensemble ordonné par la relation d'ordre $\underline{\alpha}$

On définit pour $\alpha \in E$, le successeur α^+ de α comme suit :

α^+ est successeur de $\alpha \Leftrightarrow [\alpha \ \alpha \ \alpha^+$ et $]\alpha,\alpha^+[= \phi]$

de même qu'on définit le prédécesseur α^- de α comme suit :

α^- est prédécesseur de $\alpha \Leftrightarrow [\alpha^- \ \alpha \ \alpha$ et $]\alpha^-,\alpha[= \phi]$.

1. Donner un exemple d'ensemble ordonné où un élément admet plus qu'un successeur et plus qu'un prédécesseur.

2. On suppose que E est totalement ordonné par $\underline{\alpha}$.

Montrer que dans ce cas le successeur (le prédécesseur) d'un élément, s'il existe, ne serait qu'un.

Solution :

1. Soit E= N* et $\underline{\alpha}$ la relation de divisibilité sur N* définie en exercice 3.

- 6 et 9 sont deux successeurs de 3 car :

3|6 et]3,6 [= ϕ (il n'y a aucun nombre divisible par 3 et divisant 6 autre que 3 et 6)

3|9 et]3,9 [= ϕ (il n'y a aucun nombre divisible par 3 et divisant 9 autre que 3 et 9)

- 2 et 3 sont deux prédécesseurs de 6 car :

2|6 et]2,6 [= ϕ (il n'y a aucun nombre autre que 2 divisible par 2 et divisant 6)

3|6 et]3,6 [= ϕ (il n'y a aucun nombre autre que 3 divisible par 3 et divisant 6)

2. E étant totalement ordonné.

Supposons que $\alpha \in E$, admette deux successeurs α_1^+ et α_2^+.

On a : (α_1^+ est successeur de α) $\Leftrightarrow [\alpha \ \alpha \ \alpha_1^+$ et $]\alpha,\alpha_1^+[= \phi]$

(α_2^+ est successeur de α) $\Leftrightarrow [\alpha \ \alpha \ \alpha_2^+$ et $]\alpha,\alpha_2^+[= \phi]$

on a soit : $\alpha_1^+ \underline{\alpha} \alpha_2^+$ ou $\alpha_2^+ \underline{\alpha} \alpha_1^+$ car E est totalement ordonné.

- $\alpha_1^+ = \alpha_2^+$ car $[\alpha_1^+ \neq \alpha_2^+] \Rightarrow (\alpha_1^+ \alpha \ \alpha_2^+$ ou $\alpha_2^+ \alpha \ \alpha_1^+)$

a) $(\alpha_1^+ \alpha \ \alpha_2^+$ ou $\alpha \alpha \ \alpha_1^+) \Leftrightarrow (\alpha_1^+ \in]\alpha, \alpha_2^+[\ )$ absurde car $]\alpha, \alpha_2^+[= \phi$.

b) $(\alpha_2^+ \alpha \ \alpha_1^+$ ou $\alpha \alpha \ \alpha_2^+) \Leftrightarrow (\alpha_2^+ \in]\alpha, \alpha_1^+[\ )$ absurde car $]\alpha, \alpha_1^+[= \phi$.

donc E est totalement ordonné, le successeur d'un élément, s'il existe, est unique.

Un raisonnement analogue conduit à :

Pour E totalement ordonné, le prédécesseur d'un élément, s'il existe, est unique.

➲ commentaire :

l'unicité du prédécesseur et du successeur est l'avantage majeur d'une relation d'ordre total sur une relation d'ordre partiel.

Exercice 6 :

Soit un ensemble E non vide et P une relation réflexive et transitive définie sur E.

On définie sur E la relation $\mathcal{R}$ par : $(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (x P y$ et $y P x)$.

1. montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence définie sur E (elle est appelée relation d'équivalence associée à une relation de pré-ordre).
2. montrer que $\mathcal{R}$ est compatible avec P.
3. on définit sur $E/\mathcal{R}$ la relation O par :

   $(\dot{x} \ O \ \dot{y}) \Leftrightarrow (x P y$ (où $cl(x) = \dot{x}$ et $cl(y) = \dot{y})$

   montrer que O est une relation d'ordre définie sur $E/\mathcal{R}$, est appelée relation d'ordre quotient définie sur $E/\mathcal{R}$ associée à la relation de préordre P définie sur E.

Solution :

1. on a : $\forall x \in E : x P x$ car P est réflexive.

- $(x P x) \Leftrightarrow [x P x$ et $x P x] \Leftrightarrow (x \mathcal{R} x)$ et donc $\mathcal{R}$ est réflexive
- soient $x, y \in E : x \mathcal{R} y$ on a :

$(x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow [x P y$ et $y P x] \Leftrightarrow [y P x$ et $x P y] \Leftrightarrow (y \mathcal{R} x)$

donc : $(x \mathcal{R} y) \Rightarrow (y \mathcal{R} x)$ et par suite $\mathcal{R}$ est symétrique.

- soient x, y, z $\in$ E : x $\mathcal{R}$ y et y $\mathcal{R}$ z on a :

(x $\mathcal{R}$ y) $\Leftrightarrow$ [x P y et y P x]

(y $\mathcal{R}$ z) $\Leftrightarrow$ [y P z et z P y]

[x P y et y P z] $\Rightarrow$ (x P z et [z P y et y P x]) $\Rightarrow$ (z P x) car P est transitive

(x P z et z P x) $\Leftrightarrow$ (y $\mathcal{R}$ x) et par suite $\mathcal{R}$ est transitive.

[$\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive] $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence)

2. rappelons que :

$$\left(\begin{array}{c}\text{P est compatible avec } \mathcal{R} \\ \text{ou} \\ \mathcal{R} \text{ est compatible avec P}\end{array}\right) \Leftrightarrow \forall x, x', y \in E : \left\{\begin{array}{c}[x\,\mathcal{R}\,x' \text{ et } x\,P\,y] \Rightarrow (x'\,P\,y) \\ \text{et} \\ [x\,\mathcal{R}\,x' \text{ et } x'\,P\,y] \Rightarrow (x\,P\,y)\end{array}\right\}$$

Appliquons cette définition à $\mathcal{R}$ et P définies dans cet exercice.

- [x $\mathcal{R}$ x' et x P y] $\Leftrightarrow$ [(x P x' et x' P x) et x P y]

(x' P x et x P y) $\Rightarrow$ (x' P y) car P est transitive

donc : [x $\mathcal{R}$ x' et x P y] $\Rightarrow$ (x' P y) (1)

- [x $\mathcal{R}$ x' et x' P y] $\Leftrightarrow$ [(x P x' et x' P x) et x P y]

(x P x' et x' P y) $\Rightarrow$ (x P y) car P est transitive

donc : [x $\mathcal{R}$ x' et x' P y] $\Rightarrow$ (x P y) (2)

[(1) et (2)] $\Leftrightarrow$ [$\mathcal{R}$ est compatible avec P ou P est compatible avec $\mathcal{R}$ ou P et $\mathcal{R}$ sont compatibles].

3.

- on a : $\forall$x $\in$ E : x P x car P est réflexive.

($\forall$x $\in$ E : x P x) $\Leftrightarrow$ ($\forall$x $\in$ E , $\dot{x}$ O $\dot{y}$) et par suite : O est réflexive.

- soient x, y $\in$ E : $\dot{x}$O $\dot{y}$ et $\dot{x}$O$\dot{y}$

($\dot{x}$ O $\dot{y}$)$\Leftrightarrow$ (x P y)

($\dot{x}$ O $\dot{y}$) $\Leftrightarrow$ (y P x)

donc ($\dot{x}$O $\dot{y}$ et $\dot{x}$ O $\dot{y}$) $\Leftrightarrow$ (x P y et y P x) $\Leftrightarrow$ (x $\mathcal{R}$ y) $\Leftrightarrow$ ($\dot{x}$ = $\dot{y}$)

et par suite : O est antisymétrique.

- soient x, y, z $\in$ E : $\dot{x}$ O $\dot{y}$ et $\dot{y}$ O $\dot{z}$ on a :

($\dot{x}$ O $\dot{y}$)$\Leftrightarrow$ (x P y)

($\dot{y}$ O $\dot{z}$) $\Leftrightarrow$ (y P z)

(x P y et y P z) $\Rightarrow$ (x P z) car P est transitive

(x P z) $\Leftrightarrow$ ($\dot{x}$ O $\dot{z}$) et par suite : O est transitive

[O est réflexive, symétrique, transitive]$\Leftrightarrow$ [O est une relation d'ordre définie sur E/ $\mathcal{R}$]

Exercice 7 :

Dans chacun des cas suivants, montrer que P est une relation de préordre sur E. et définir l'ordre quotient associé :

1. E= RxR et P : ((a,b) P (a',b')) $\Leftrightarrow$ (a $\leq$ a').
2. E= l'ensemble des parties finies de N. pour A={a_1,…a_n} on définit le nombre naturel $\delta(A)= \sum_{i=1}^{n} a_i$. P est alors définie comme suit : (A P B) $\Leftrightarrow$ (δ(A)= δ(B))
3. E= Z* et P la relation de divisibilité sur Z*

Solution :

1.

- $\forall$a$\in$R : a $\leq$ a donc $\forall$ (a,b) $\in R^2$: (a,b) P (a,b) et par suite P est réflexive.
- ((a,b) P(a',b') et (a',b') P (a'',b'')) $\Rightarrow$ (a $\leq$ a'') et par suite P est transitive.

[P est réflexive et transitive] $\Leftrightarrow$ (P est une relation de préordre sur RxR

- ($\overset{\bullet}{\widehat{o\ (a',b'))}}$ $\Leftrightarrow$ ((a,b) P (a',b')) $\Leftrightarrow$ (a $\leq$ a').

2.

- $\forall$A={a_1,…a_n}, (δ(A)=$\sum_{i=1}^{n} a_i \in N$)$\Rightarrow$ (δ(A) $\leq$ δ(A)) $\Leftrightarrow$ (APA) et par suite P est réflexive.

- $(\delta(A) \leq \delta(B)$ et $\delta(B) \leq \delta(C)) \Rightarrow (\delta(A) \leq \delta(C)) \Leftrightarrow (A\ P\ C)$

$(A\ P\ B$ et $B\ P\ C) \Rightarrow (A\ P\ C)$ donc : P est transitive.

[P est réflexive et transitive] $\Leftrightarrow$ (P est une relation de préordre sur l'ensemble des parties finies de N).

- $(\dot{A}\ O\ \dot{B}) \Leftrightarrow (A\ P\ B) \Leftrightarrow (\delta(A) \leq \delta(B))$ donc : $\dot{A}\ O\ \dot{B} \Leftrightarrow \delta(A) \leq \delta(B)$

3.

- $\forall a \in Z^*$: $a \mid a$ donc $\forall\ a \in Z^*$: a P a et par suite P est réflexive.
- $(a \mid b$ et $b \mid c) \Rightarrow (a \mid c)$ car $(b = k_1 a$ et $c = k_2 b) \Rightarrow (c = k_2\ k_1 a,\ k_2, k_1 \in Z^*)$

donc : P est transitive.

[P est réflexive et transitive] $\Leftrightarrow$ P est une relation de préordre sur Z^*

$(\dot{x}\ O\ \dot{y}) \Leftrightarrow (x\ P\ y) \Leftrightarrow (x \mid y)$ donc : $(\dot{x}\ O\ \dot{y}) \Leftrightarrow (x \mid y)$

➲ remarque :

la troisième question pourrait être traitée sur Z au lieu de z^* sans aucun changement sur la solution.

Exercice 8 :

Soit $E \neq \phi$ et R_E l'ensemble des relations d'équivalence définies sur E.

On définit sur R_E la relation α par : $(R_1\ \alpha\ R_2) \Leftrightarrow (\forall (x,y) \in E^2 : (x\ R_1\ y) \Rightarrow (x\ R_2\ y))$

(on dit que R_1 est plus fine que R_2)

1. montrer que α est une relation d'ordre définie sur E.

2. montrer que R_1 est plus fine que R_2 si et seulement si toute classe d'équivalence modulo R_2 est une réunion des classes d'équivalence modulo R_1

3. cet ordre est-il total ou partiel ?

4. R_E admet-il un plus petit élément (Minimum), un plus grand élément (Maximum).

5. Soit E= Z et $n \in N^*$ définir les relations de congruence plus fines (moins fines) que la relation de congruence modulo n dans Z

Solution :

1.

- $\forall(x,y) \in E^2 : (x\ R\ y) \Rightarrow (x\ R\ y)$, $\forall\ R \in R_E$: $R\ \underline{\alpha}\ R$ et $\underline{\alpha}$ est réflexive
- soient $(x,y) \in E^2$ et $(R_1, R_2) \in R_E$ telles que $[x\ R_1\ y] \Rightarrow [x\ R_2\ y]$ et $[x\ R_2 y] \Rightarrow [x\ R_1\ y]$

donc : $(x\ R_1\ y) \Leftrightarrow (x\ R_2\ y) \Leftrightarrow (R_1 = R_2)$

et $(R_1\ \underline{\alpha}\ R_2$ et $R_2\ \underline{\alpha}\ R_1) \Rightarrow (R_1 = R_2)$ et par suite $\underline{\alpha}$ est antisymétrique.

- $[x\ R_1\ y] \Rightarrow [x\ R_2\ y]$ et $[x\ R_2\ y] \Rightarrow [x\ R_3\ y] \Rightarrow [x\ R_1\ y] \Rightarrow [x\ R_3\ y]$

l'implication est une relation transitive dans l'ensemble des propositions logiques.

donc : $(R_1\ \underline{\alpha}\ R_2$ et $R_2\ \underline{\alpha} R_3) \Rightarrow (R_1\ \underline{\alpha}\ R_3)$ et par suite $\underline{\alpha}$ est transitive.

$[\underline{\alpha}$ est réflexive, antisymétrique, transitive$] \Leftrightarrow [\underline{\alpha}$ est une relation d'ordre définie sur $R_E]$

2.

- montrons d'abord l'implication :

$(R_1\ \underline{\alpha}\ R_2) \Rightarrow$ (toute les classes d'équivalence modulo R_2 est une réunion de classes d'équivalence modulo R_1)

Remarquons par ailleurs que : $(R_1\ \underline{\alpha} R_2) \Leftrightarrow (\forall x \in E\ \dot{x}/R_1 \subset \dot{x}/R_2)$

($\dot{x}/R_1$ et $\dot{x}/R_2$ désignent respectivement les classes d'équivalence modulo R_2 et R_1 de l'élément $x \in E$).

alors ou bien : $\dot{x}/R_1 = \dot{x}/R_2$

ou bien : $\dot{x}/R_1 - \dot{x}/R_2 \neq \phi$ auquel cas: $\dot{x}/R_2 = \dot{x}/R_1 \cup (\dot{x}/R_1 - \dot{x}/R_2)$

mais $\dot{x}/R_2 - \dot{x}/R_1 = \underset{\alpha \in (\dot{x}/R_1 - \dot{x}/R_2)}{\dot{x}/R_1}$ car $(\alpha/R_1)_{\alpha \in (\dot{x}/R_1 - \dot{x}/R_2)}$ est une partition de $\dot{x}/R_2 - \dot{x}/R_1$

donc : $\dot{x}/R_2 = \dot{x}/R_1 \cup \bigcup_{\alpha \in (\dot{x}/R_1 - \dot{x}/R_2)} \dot{\alpha}/R_1 = \bigcup_{\alpha \in (\dot{x}/R_1 - \dot{x}/R_2) \cup \{x\}} \dot{\alpha}/R_1$

et par suite: $\dot{x}/R_2$ est une union des classes d'équivalence modulo R_1 (*)

- montrons maintenant l'implication pour $x \in E$:

($\dot{x}/R_2$ est une union de classes d'équivalence modulo R_1) $\Rightarrow (R_1\ \underline{\alpha}\ R_2)$

si $\dot{x}/R_2$ est une union de classes d'équivalence modulo R_1 alors l'une des classes d'équivalence modulo R_1 de cette union est $\dot{x}/R_1$ car $x \in \dot{x}/R_2$.

Et$(x \in \dot{x}/R_2) \Rightarrow$ (x est donc l'une des classes d'équivalence modulo R_1 de l'union).

- montrons maintenant l'implication pour $x \in E$:

($\dot{x}/R_2$ est une union de classes d'équivalence modulo R_1)$\Rightarrow$ ($R_1 \underline{\alpha} R_2$)

si $\dot{x}/R_2$ est une union de classes d'équivalence modulo R_1 alors l'une des classes d'équivalence modulo R_1de cette union est $\dot{x}/R_1$ car $x \in \dot{x}/R_2$.

Et($x \in \dot{x}/R_2$)$\Rightarrow$ (x est donc l'une des classes d'équivalence modulo R_1 de l'union).

Mais : ($x \in \dot{\alpha}_0/R_1$)$\Leftrightarrow$ ($\dot{x}/R_1 = \dot{\alpha}_0/R_1$)

On a alors : $\dot{x}/R_1 = \dot{x}/R_2$(car $\dot{x}/R_2$ est une union de classes d'équivalence modulo R_1 dont $\dot{x}/R_1$ est un élément)

($\dot{x}/R_1 \subset \dot{x}/R_2$)$\Leftrightarrow$ ($R_1 \underline{\alpha} R_2$)(voir remarque précédente).

Et par suite :

($\forall x \in E$ $\dot{x}/R_2$ est union de classes d'équivalence modulo R_1)$\Rightarrow$ ($R_1 \underline{\alpha} R_2$) (**)

[(*) et (**)]$\Leftrightarrow$[$R_1 \underline{\alpha} R_2 \Leftrightarrow \forall x \in E$: $\dot{x}/R_2$ est union de classes d'équivalence modulo R_1]

3. Soit $E = \mathbb{Z}$

R_1 la relation de congruence modulo 5, R_2 la relation de congruence modulo 3.

On a: $7 \equiv 2[5]$ et $7 \not\equiv 2[3]$

$7\ R_1\ 2$ et $7\ \not{R}_2\ 2$ donc $R_1 \not\underline{\alpha} R_2$

$5 \equiv 2[3]$ et $5 \not\equiv 2[5]$

$5\ R_2\ 2$ et $5\ \not{R}_1\ 2$ donc $R_2 \not\underline{\alpha} R_1$

$\underline{\alpha}$ est une relation d'ordre partiel sur $\mathbb{Z}$

4. Rappelons que la relation Δ définie par : $(a\Delta b) \Leftrightarrow (a = b)$ est une relation d'équivalence sur E et que la relation triviale sur E noté E^2 définie par :

$\forall (x,y) \in E^2$: x R y est aussi une relation d'équivalence.

- On a : $\forall R \in R_E$: $(R \underline{\alpha} E^2) \Rightarrow (x\ (E^2)\ y)$.

Donc $\forall R \in R_E$: $R \underline{\alpha} E^2$ et $E^2 \in R_E$

E^2 est le plus grand élément de R_E

- On a : $\forall R \in R_E$ et $\forall (x,y) \in E^2$: $(x \Delta y) \Rightarrow (x\ R\ y)$ car R est réflexive

Donc $\forall R \in R_E$: $\Delta \underline{\alpha} R$ et $\Delta \in R_E$

Δ est le plus petit élément de R_E

5. $(x = y[n]) \Leftrightarrow ((x-y) \in nZ)$.

Soit $n' \in N$:

- si $n'|n$ alors $nZ \subset n'Z$ et par suite $((x-y) \in nZ) \Rightarrow ((x-y) \in n'Z)$ et par suite la relation de congruence modulo n est plus fine que la relation de congruence modulo n'.
- si $n|n'$ alors $n'Z \subset nZ$ et par suite $((x-y) \in n'Z) \Rightarrow ((x-y) \in nZ)$ et par suite la relation de congruence modulo n' est plus fine que la relation de congruence modulo n.

conclusion:

- les relations de congruence plus fines que la relation de congruence modulo n sont les relations de congruence dans le module n' est divisible par n.
- les relations de congruence moins fines que la relation de congruence modulo n sont les relations de congruence dans le module n' divise n.

Exercice 9 :

On donne les définitions suivantes :

- on appelle ordre complet défini sur un ensemble X, toute relation d'ordre telle que : toute partie majorée admet une borne supérieure, on dit alors que X est complètement ordonné.
- on appelle ordre total défini sur un ensemble X, toute relation d'ordre telle que :

$\forall (x,y) \in E^2$: $x \underline{\alpha} y$ ou $y \underline{\alpha} x$, on dit alors que X est totalement ordonné.

- on appelle bon ordre défini sur un ensemble X, toute relation d'ordre telle que : toute partie non vide admet un minimum, on dit alors que X est bien ordonné.

Etablir les implications :

1. [$\underline{\alpha}$ bon ordre]$\Rightarrow$ [$\underline{\alpha}$ complet]

2. [$\underline{\alpha}$ bon ordre]$\Rightarrow$ [$\underline{\alpha}$ ordre total]

3. exhiber un contre exemple judicieux montrant que les implications réciproques 1 et 2 sont fausses.

Solution :

1. soit E une partie majorée de x.

[E partie majorée de x] $\Leftrightarrow$ [l'ensemble M des majorants de E est non vide]

puisque $\underline{\alpha}$ est une relation de bon ordre sur E, M admet un minimum m.

[m majore E et m est le minimum de M] $\Leftrightarrow$ [m est le plus petit des majorants de E]

[m est le plus petit des majorants de E] $\Leftrightarrow$ [m = Sup E]

et par suite : [$\underline{\alpha}$ bon ordre]$\Rightarrow$ [$\underline{\alpha}$ complet]

2. soit $(x,y) \in E^2$, la partie $\{x,y\}$ de E est non vide.

Puisque $\underline{\alpha}$est un bon ordre sur E, alors $\{x,y\}$ admet un minimum x ou y

Donc on a ou $x \underline{\alpha} y$ ou $y \underline{\alpha} x$ et par suite $\underline{\alpha}$ est un ordre total.

Donc : [$\underline{\alpha}$ bon ordre]$\Rightarrow$ [$\underline{\alpha}$ ordre total]

2. la relation $\leq$ ordre usuel sur R une relation d'ordre complet (axiome de la borne supérieure dans R) et total dans R : $\forall(x,y) \in R^2 : x \leq y$ ou $y \leq x$ mais r contient des parties non vides n'admettant pas de minimum.

Considérer les intervalles du type]a,b[(a<b).

Exercice 10 :

On définit un ordre filtrant sur un ensemble E comme une relation d'ordre telle que deux éléments quelconques de E admettent un majorant.

C'est à dire : $\forall \{x,y\} \in P(E), \exists m \in E : x \mathcal{R} m$ et $y \mathcal{R} m$

1. montrer que E, étant un ensemble non vide, la relation d'inclusion sur $P(E)$ est un ordre filtrant sur $P(E)$.
2. montrer que la relation $\leq$ dans $\mathbb{N}$, la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}^*$ sont deux ordres filtrants respectivement sur $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$.
3. montrer que si un ensemble ordonné X admet un maximum alors l'ordre est filtrant .
4. montrer qu'un élément maximal pour un ordre filtrant est un maximum.

Solution :

1. $\forall A,B \in P(E)$ on a : $A \cup B \in P(E)$ et $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.

donc $A \cup B$ majore $\{A,B\}$ et par suite « $\subset$ » sur $P(E)$ est un ordre filtrant.

2.

- sur $\mathbb{N}$: $\leq$ est un ordre filtrant car :

$\forall (a ,b) \in \mathbb{N}^2 : (a \leq b)$ ou $(b \leq a)$

$\{a,b\}$ est majoré par b $(a \leq b)$ ou a $(b \leq a)$ et donc $\{a,b\}$ est majoré soit par b ou a

- sur $\mathbb{N}^*$: soient $a ,b \in \mathbb{N}^*$ et $m(a,b)$ un multiple commun à a et b (ab par exemple)

on a : $a|m(a,b)$ et $b|m(a,b)$.

donc $m(a,b)$ majore $\{a,b\}$ et par suite la divisibilité sur $\mathbb{N}^*$ est un ordre filtrant.

3. Soit M le maximum de X ordonné par $\mathcal{R}$

On a : $\forall x \in X : x \mathcal{R} M$, donc : $\forall a ,b \in X : A \mathcal{R} M$ et $b \mathcal{R} M$

Et $\{a,b\}$ est majoré par M et par suite $\mathcal{R}$ est un ordre filtrant.

4. Il s'agit de prouver qu'un élément Maximal M dans un ensemble E ordonné par un ordre filtrant est comparable à tous les éléments de cet ensemble E.

Supposant que : $\exists x \in E$ non comparable à M.

Considérons la partie $\{x,M\}$ de E. cette partie est nécessairement majorée car l'ordre dans E est filtrant.

Le majorant M' de $\{x,M\}$ est nécessairement comparable à M et on a : $M \mathcal{R} M'$

Mais M' étant comparable à M et M étant un élément maximal, on a nécessairement :

$M \mathcal{R} M'$

Et par suite $M = M'$ d'où $x \mathcal{R} M' = M$, contradiction avec x non comparable à M.

Donc il n'y a pas d'éléments dans E non comparables à M.

Tous les éléments de E sont comparables à M et par suite :

$\forall x \in E : x \mathcal{R} M$ (car M est un élément maximal)

finalement : M est un maximum.

CHAPITRE C

Cardinaux

(15 Exercices, 38 Questions)

- ☐ Relation d'Equipotence entre ensembles.
- ☐ Cardinaux FINIS - Cardinaux INFINIS.
- ☐ Opérations sur les cardinaux (FINIS et INFINIS).
- ☐ Puissance du dénombrable - Puissance du continu.

Exercice 1:

Etablir une bijection entre [a,b] et [c,d] avec a,b,c et d $\in$ R.

Solution :

Les applications $f : [0,1] \to [a,b]$.

$$x \to (b-a)\,x + a$$

et $g : [0,1] \to [c,d]$.

$$x \to (d-c)\,x + c.$$

Définissent deux bijections de [0,1] respectivement sur [a,b] et [c,d].

L'application f^{-1}: $[a,b] \to [0,1]$.

$$x \to \frac{x-a}{b-a}$$

est l'application réciproque de f c'est donc une bijection de [a,b] sur [0,1].

L'application gof^{-1} : $[a,b] \to [c,d]$.

$$x \to (gof^{-1})(x).$$

est une bijection de [a,b] sur [c,d] comme composée de deux bijections.

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[dr, "gof^{-1}"'] & {[0,1]} \arrow[d, "g"] \\ & {[c,d]} \end{tikzcd}$$

Explicitons $gof^{-1}(x)$:

$$gof^{-1}(x) = g\left(\frac{x-a}{b-a}\right) = (d-c)\frac{x-a}{b-a} + c = \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}$$

$$gof^{-1}(x) = \frac{1}{b-a}\left[\,(d-c)x + (bc-ad)\,\right]$$

Application numérique :

[a,b] = [2, 5]

[c,d] = [1, 3].

$gof^{-1}(x) = {}^{2}/_{3}\,x - {}^{1}/_{3} = {}^{1}/_{3}\,(2x - 1)$

L'application : $[2,5] \to [1, 3]$

$$x \to {}^{1}/_{3}\,(2x - 1) \text{ est bijective.}$$

➲ **Commentaire** :

nous savons que les intervalles [a,b] et [c,d] sont équipotents comme ensembles équipotents à [0,1].

Nous venons d'établir leur equipotence par la bijection :

$$x \to \frac{d-c}{b-a}x + \frac{bc-ad}{b-a}$$

Toutes les bijections utilisées entre intervalles fermés (où ouverts) de R sont des bijections affines continues et monotones (ici strictement croissantes) ;ce sont des Homéomorphismes.

Tous les intervalles de R sont Homéomorphes et ont la puissance du continu

Exercice 2 :

Montrer que $\forall a \in R$

1. $]-\infty, a[$ eq R.

2. $]a, +\infty[$ eq R.

3. déduire que $]-\infty, a]$ et $[a, +\infty[$ sont chacun équipotent à R.

Solution :

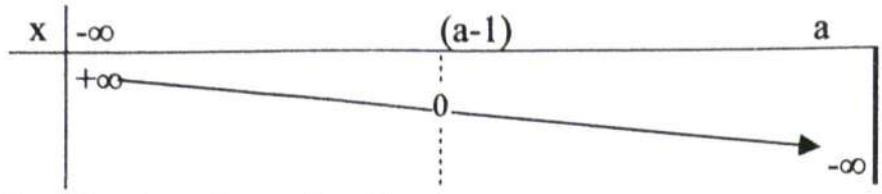
1. l'application : $]-\infty, a[\to R$ est bijective.

$$x \to \text{Ln}\,[a-x].$$

Car $[\text{Ln}\,(a-x)]' = -\dfrac{1}{a-x} < 0$

l'application et donc strictement monotone (décroissante).

En plus : $\lim\limits_{x\to-\infty} \text{Ln}\,(a-x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a} \text{Ln}\,(a-x) = -\infty$ et $\text{Ln}\,(a-x)$ est continue.

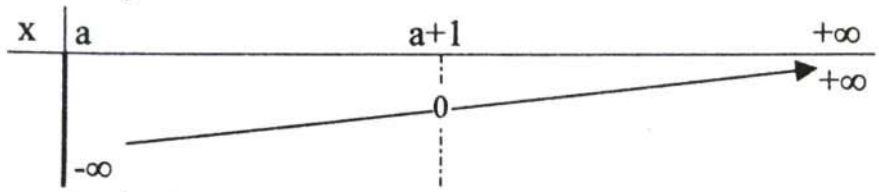


Et l'application :]- ∞, a[→ R

$$x \to \text{Ln}\,[a-x\,] \text{ est bijective.}$$

car : $[\text{Ln}\,(x-a)]' = \dfrac{1}{x-a} > 0$; l'application est donc strictement croisante.

de plus : $\lim\limits_{x \to a} \text{Ln}\,(x-a) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \text{Ln}\,(x-a) = +\infty$



et x → Ln (x-a) est continue

➲ commentaire 1 :

Les deux intervalles]- ∞, a[et]a, +∞ [étant chacun équipotent à R sont donc Equipotents

(Transitivité de l'equipotence).

]- ∞, a[eq]a, +∞ [.

2.]- ∞, a] =]- ∞, a[∪{a}

]- ∞, a[∩{a} = ϕ.

donc : card (]-∞, a]) = card]- ∞, a[+ card {a}.

card]- ∞, a[= c (voire 1.), card {a} = 1 (nombre fini).

1 ≠ 0 et 1< c alors c+1 = c ;card]- ∞, a[= card]- ∞, a[.

donc :]- ∞, a[eq]- ∞, a[.

de la même manière ;on établit que [a, +∞ [eq]a, +∞ [

➲ commentaire 2 :

comme dans le commentaire 1 :]- ∞, a] eq [a, +∞ [(La transitivité de l'equipotence)

]- ∞, a] eq]- ∞, a[et [a, +∞ [eq]a, +∞ [.

Les intervalles $]a, +\infty[$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, a[$, $]-\infty, a]$; sont équipotents. Ils ont tous la puissance du continu.

➲ commentaire 3 :

comme dans l'exercice 1 on peut établir une bijection entre les 2 intervalles : $]a_1, +\infty[$ et $]a_2, +\infty[$ ou $]-\infty, a_1[$ et $]-\infty, a_2[$ avec $(a_1, a_2) \in R^2$ comme suit :

$$\begin{tikzcd}]a_1, +\infty[\arrow[r, "Ln\,(x-a_1)"] \arrow[dr, dashed, "(x-a_1 + a_2)"'] & R \arrow[d, "e^x + a_2"] \\ &]a_2, +\infty[. \end{tikzcd}$$

La fonction $x \to e^x + a_2$ est la fonction réciproque de : $]a_2, +\infty[\to R$

$x \to Ln\,(a_2-x)$

La fonction $x \to (x-a_1+a_2)$ de $]a_1,+\infty[$ sur $]a_2, +\infty[$ est encore une fois une bijection Affine continue.

$]a_1,+\infty[$ et $]a_2, +\infty[$ sont Homéomorphes.

Le cas des intervalles $]-\infty, a_1[$ et $]-\infty, a_2[$ est laissé au lecteur.

Exercice 3 :

Pour tout entier naturel $k \geq 2$ et pour tout cardinal a, on définit le cardinal :

$$\underbrace{ka = a + a + a + \ldots\ldots\ldots\ldots a}_{K \text{ fois}}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que $\forall a \geq 2 : k\aleph_0 = \aleph_0$.

Pour tout $k \geq 2$ et pour tout $j \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$.

On définit l'ensemble $I_{k,j} = \{pk + j, p \in Z\}$.

(Dans cette définition K et j sont fixés).

1. Montrer que $(I_{k,j})_{j \in \{0,1,2\ldots\ldots,k-1\}}$ Définit une partition de Z.

2. Prouver que $\forall j \in \{0,1 \ldots\ldots k-1\}$: $I_{k,j}$ eq Z.

3. Déduire que $k\aleph_0 = \aleph_0$

➲ **Solution :**

1. $\forall j \in \{0,1,\ldots\ldots\ldots k-1\}$. $I_{k,j} \neq \Phi$

$j = 0.k + j$ donc $j \in I_{k,j}$(ici p=0)

$\forall j_1, j_2 \in \{0,1,\ldots\ldots\ldots k-1\}: j_1 = j_2 \Leftrightarrow I_{k,j_1} \cap I_{k,j_2} = \phi$.

(I_{k,j_1}, et I_{k,j_2} sont les clases d'équivalence de la relation de congruence modulo k dans Z).

$\cup I_{k,j} = Z$; $j \in \{0,1 \ldots\ldots\ldots k-1\}$.

(Tout entier rationnel a un reste $j \in \{0,1 \ldots\ldots k-1\}$ dans sa division euclidienne par k).

Ce qui achève de montrer que les ensembles $I_{k,j}$ définissent une partition de Z.

➲ **remarque :**

$\forall j \in \{0,1, \ldots\ldots\ldots, k-1\}$ $I_{k,j}$ et appelé en mathématiques élémentaires « entier modulo k ».

2. l'application : $\zeta_{k,j} : Z \rightarrow I_{k,j}$

$\forall j \in \{0, \ldots\ldots\ldots\ldots k-1\}$ $P \rightarrow pk+j$ est bijective

donc $I_{k,j}$ eq Z

3. Card Z = Card $N = \aleph_0$

donc : Card $I_{k,j} = \aleph_0$

de plus pour tous $j \in \{0,,\ldots\ldots k-1\}$: Card Z = Card $(\cup I_{k,j}) = \Sigma$ Card $I_{k,j} = k$ Card $I_{k,j} = k\ \aleph_0$

les I_{Kj} sont deux à deux disjoints donc : $\aleph_0 = K\ \aleph_0$.

Application numérique :

$k = 3, j \in \{0,1,2\}$

$I_{3,0} = \{ 3p, p \in Z\}$; $I_{3,1} = \{ 3p+1, p \in Z\}$.

$I_{3,2} = \{3p + 2, p \in Z\}$.

On a : $I_{3,0} \cup I_{3,1} \cup I_{3,2} = Z$.

$I_{3,0} \cap I_{3,1} = I_{3,0} \cap I_{3,2} = I_{3,1} \cap I_{3,2} = \phi$

$\forall j \in \{0,1,2\}, I_{3,j} \neq \phi$.

Donc : $\{ I_{3,0}; I_{3,1}; I_{3,2} \}$ est une Partition de Z.

Les applications. $\zeta_{3,0} : Z \to I_{3,0}$

$P \to 3P.$

$\zeta_{3,1} : Z \to I_{3,1}$

$P \to 3P+1$

$\zeta_{3,2} : Z \to I_{3,2}$

$P \to \quad 3P+2.$

Sont toutes les trois bijectives. Ce qui assure l'équipotence de Z avec chacun des ensembles.

$I_{3,0}$; $I_{3,1}$ est $I_{3,2}$ donc :

- $(Z \text{ eq } I_{3,0}) \Leftrightarrow (\text{Card } I_{3,0} = \aleph_0)$
- $(Z \text{ eq } I_{3,1}) \Leftrightarrow (\text{Card } I_{3,1} = \aleph_0)$
- $(Z \text{ eq } I_{3,2}) \Leftrightarrow (\text{Card } I_{3,2} = \aleph_0.)$

Card Z = Card $I_{3,0}$ + Card $I_{3,1}$ + Card $I_{3,2}$.

donc $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = 3\,\aleph_0$

➲ **commentaire** :

On pourrait traiter le même exercice en prenant l'ensemble N des entiers naturels comme ensemble de référence au lieu de Z et en définissant les ensembles $I_{k,j}$ comme suit :

$I_{k,j} = \{ pk + j \}, p \in N\}$ avec $j \in \{ 0,1,2 \ldots\ldots k-1 \}$.

On montrerait aisément que $I_{k,j}$ eq N et que : $(k\aleph_0 = \aleph_0.)$

Pour k=2 : On retrouve $2\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

Exercice 4 :

Montrer que le complémentaire d'une partie finie d'un ensemble infini par rapport à cet ensemble est un ensemble infini.

Solution :

Soit E un ensemble infini et $A \subset E$ avec A fini. Montrons que E-A est infini. E-A est un ensemble Infini Car si (E-A) était un ensemble fini alors $(E-A) \cup A$. le serait aussi comme union de deux ensembles finis

Or $(E-A) \cup A = E$. Ce qui Contredit le fait que E soit infini. D'où Le Résultat !!

➲ **Commentaire** :

Ce résultat généralise le résultat (analogue) Concernant le complémentaire d'une partie finie d'un ensemble dénombrable, par rapport à ce dernier : Il a été établi que cette partie est dénombrable aussi

Exercice 5 :

Montrer que $\forall (a,b) \in R^2$:

[a,b[et]a,b] sont deux intervalles de R équipotents à R.

Solution :

Nous avons :

1. $]a,b[\subset [a,b[\subset [a,+\infty[$.

donc $(]a,b[\underline{\alpha} [a,b[\underline{\alpha} [a,+\infty[) \Leftrightarrow (\text{Card }]a,b[\leq \text{Card } [a,b[\leq \text{Card } [a,+\infty[)$.

comme Card $]a,b[$ = Card $[a,+\infty[= c$.

alors : $c \leq \text{Card } [a,b[\leq c$ Card $[a,b[= c$.

Soit : [a,b[eq R

2. $]a,b[\subset]a,b] \subset]a,+\infty[$.

Donc : $]a,b[\underline{\alpha}]a,b] \underline{\alpha}]a,+\infty[\Leftrightarrow \text{Card }]a,b[\leq \text{Card }]a,b] \leq \text{Card }]a+\infty[$.

$c \leq \text{Card }]a,b] \leq c$.

d'où : $(\text{Card }]a,b] = c) \Leftrightarrow ( ]a,b] \text{ eq } R)$

➲ **Commentaire :**

Les deux résultats de cet exercice achèvent de prouver que tous les intervalles de R (ouverts, Fermés, Semi-ouverts) ont la puissance du continu: Ils sont donc tous Equipotents entre eux.

Exercice 6 :

Soient $(x_0, a) \in R \times R^*$.

Montrer que l'ensemble $I_{x_0,a} = \{ x \in R : \exists\, k \in Z : x = ka + x_0 \}$. a la puissance du dénombrable c.à.d : Card $I_{x_0,a} = \aleph_0$.

Solution :

L'application : $\psi_{x_0,a}$: $\quad I_{x_0,a} \to Z$.

$ka + x_0 \to k$. Est manifestement bijective.

Donc : $I_{x_0,a}$ eq Z.

Comme Card $Z = \aleph_0$ alors : Card $I_{x_0,a} = \aleph_0$.

➲ **Commentaire :**

Dans la définition de $I_{x_0,a}$ de l'exercice 6 : On pourrait remplacer R par n'importe quel autre sous ensemble de R et Z par n'importe quel autre sous ensemble dénombrable E de R.

Car l'application $\psi_{x_0,a}$: $\quad I_{x_0,a} \to E$.

$ka + x_0 \to k$. Reste bijective.

Le résultat de cet exercice généralise le résultat de la deuxième question de l'exercice 3 .

Exercice 7 :

Soit $a \in R^*_+$. On définit sur R la relation $\mathcal{R}$ par :

$\forall (x,y) \in R^2 : (x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (\exists\, k \in Z : x-y = ka)$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur R.

2. Pour $x \in R$, définir la classe d'équivalence ξ de x.

3. Montrer que R est équipotent à $((R/\mathcal{R}) \times Z)$.

Solution :

1.

$\forall\ x \in R : x-x = 0.a$ donc : $\mathcal{R}$ est réflexive.

Si : $x-y = k.a$ alors $y-x = (-k).a$.

Donc : $(x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\mathcal{R}x)$.

Donc : $\mathcal{R}$ est symétrique.

Si : $x-y = k_1a$ $k_1 \in Z$.

Et : $y-z = k_2a$ $k_2 \in Z$.

Alors : $(x-y) = (k_1+k_2).a$ car $(k_1+k_2) \in Z$.

$(x-z) = (x-y) + (y-z)$.

donc : $(x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow (x\mathcal{R}z)$ et $\mathcal{R}$ est transitive.

$\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence.

2.

$\forall\ x \in R : \xi = \{y \in R : \exists\ k \in Z : y-k = k.a\}$.

$\xi = \{ y \in R : \exists\ k \in Z : y = x+ka\} = I_{x,a.}$ (voir exercice 6)

3.

Les ensembles $I_{x,a}$ définissent une partition de R. : $(R = \bigcup_{x \in R} I_{x,a}\ ;\ I_{x_0,a} \cap I_{x_1,a} = \phi$ si : $x_1 \neq x_2)$.

Donc : $\forall\ x \in R : \exists!\ (x_0,k) \in R \times Z$ tel que : $x = x_0 + ka$ ($x \in \xi_0$).

Chaque nombre réel est un élément d'une seule classe d'équivalence $I_{x_0,a}$.

Le nombre k indique « sa position » à l'intérieur de $I_{x_0,a}$ .Ce qui se traduit par l'existence d'une application .

$$\psi : R \rightarrow (R/\mathcal{R}) \times Z$$

$$x \rightarrow (I_{x_0,a}\ ,\ k) \text{ bijective.}$$

Donc : R est équipotent à $((R/\mathcal{R}) \times Z)$.

➲ **Commentaire** :

La relation $\mathcal{R}$ définie dans cet exercice est la relation de congruence modulo a dans R. Le module de la congruence étant un nombre réel strictement positif.

$x\ \mathcal{R}\ y$ se note : $x \equiv y[a]$.

Exercice 8 :

Montrer que $(R/\mathcal{R})$ eq $[0,a[$ $(a \in R^*_+)$

($\mathcal{R}$ étant la relation de congruence définie à l'exercice 7)

Solution :

Montrons d'abord que : $\forall x \in R, \forall a \in R^*_+ : \exists !(k,x_0) \in Z\times[0,a[: x = ka + x_0$

1. Supposons $x \in R^+$ et considérons l'ensemble : $I_x = \{ pa : pa \leq x, p \in N \}$.

Cet ensemble admet un plus grand élément ka ($k \in N$).car si I_x n'avait pas de plus grand élément alors on se trouverait dans la situation où tout multiple entier pa de $a \leq x$ aurait un multiple entier pa de $a \leq x$ et plus grand que lui.

Ce qui équivaut à dire qu'aucun multiple entier de a n'est strictement plus grand que x ce qui est en contradiction avec R Archimédien !!.

$(\forall x \in R^+, \forall a \in R^+ : \exists n \in N : na > x)$.

➲ Remarque :

Nous appelons multiple entier de $a \in R$ le nombre ka (avec $k \in Z$).

Donc I_x admet Un plus grand élément ka.

On a : $ka \leq x < (k + 1)a$

Soit, en retranchant ka à tous les termes de cette double inégalité il vient : $0 \leq x - ka < a$

Posons : $x - ka = x_0$ alors : $x = ka + x_0$.

Donc : $\forall x \in R^+, \exists! (k, x_0) \in Z \times[0,a[: \begin{cases} x = ka + x_0 \\ 0 \leq x_0 < a . \end{cases}$

2.

Si : $x \in R^-$

Ou bien : $(-x) = ka$ dans ce cas $x = (-k)\, a$, $(x_0 = 0)$, $(k \in N)$.

Ou: $(-x) \neq k\, .a$ $(x_0 \neq 0)$ on aurait :

$[Ka < (-x) < (k + 1)\, a\ (k \in N)] \Leftrightarrow [-(k+1)a < x] < (-k)a \Leftrightarrow [0 < x + (k+1)a < a]$.

Posons : $x+(k+1)a = x_0$. Alors : $x = -(k+1) + x_0$.

$0 < x_0 < a$.

Soit finalement en posant $k' = -(k+1)$:

$$\begin{cases} x = k' a + x_0 \\ 0 < x < a \quad (k' \in Z^-). \end{cases}$$

En regroupant les résultats pour $x \in R^+$ et $x \in R^-$. On peut énoncer :

$\forall x \in R, \forall a \in R^*_+ : \exists !(k,x_0) \in Z\times[0,a[: x = ka + x_0$ et $0 \leq x_0 < a$.

L'opération qui à tout couple $(x, a) \in R\times R^*_+$ associe le couple unique $(k, x_0) \in Z \times [0,a[$ est une sorte de ''division euclidienne'' Dans R, le diviseur est $a \in R^*_+$ et le reste r est x_0, le quotient étant le nombre entier k.

$$\begin{cases} x = ka + x_0 \\ 0 \leq x_0 < a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv x_0 \, [a] \\ 0 < x_0 < a \end{cases}$$

Tout nombre réel est congru à son « reste » x_0 dans sa « division » par a.

$(x \equiv y \, [a]) \Leftrightarrow (\exists \, k_1 \in Z : x - y = k_1 a) \Leftrightarrow (x = y + k_1 a)$

$(y \equiv x_0 \, [a]) \Leftrightarrow (\exists \, k_2 \in Z : y = k_2 a + x_0)$

Donc : $x = (k_1 + k_2)a + x_0 \Leftrightarrow x \equiv x_0 \, [a]$.

Réciproquèrent : supposons que $x \equiv x_0 \, [a]$ et $y \equiv x_0 \, [a]$

Alors : $\exists \, (k_1, k_2) \in Z^2 : x = k_1 a + x_0$ et $y = k_2 a + x_0$

alors : $x - y = (k_1 - k_2) a \Leftrightarrow x \equiv y[a]$.

➲ conclusion :

$(x = y \, [a]) \Leftrightarrow$ (x et y ont le même reste dans leurs divisions par a).

Ceci conduit à définir l'application $f : (R/\mathcal{R}) \to [0,a[$.

$$\xi \to x_0.$$

(x_0 est le reste de la division par a de x, il ne dépend pas de x).

Cette application est bijective (unicité du reste de la division de x par a).

Donc : $(R/\mathcal{R})$ eq. $[0,a[$.0

➲ commentaire :

Dans l'exercice 7, nous avons établi que :

R eq. $(R/\mathcal{R})\times Z$ alors comme $(R/\mathcal{R})$ eq. $[0,a[$ on obtient : R eq. $[0,a[\times Z$

Et donc : $c = c \, \aleph_0$.

Exercice 9 :

Soit dans R la relation $\mathcal{R}$ définie par: $\forall (x,y) \in R^2 \quad (x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow ((x-y) \in Z)$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Déterminer le cardinal $(R/\mathcal{R})$.

Solution :

1.

$\forall x \in R\ (x-x = 0 \in Z) \Leftrightarrow (\mathcal{R}$ réflexive).

$(x-y \in Z) \Rightarrow (y-x \in Z)$ (y-x est le symétrique de (x-y) dans (Z,+) groupe Abélien.)

donc : $\mathcal{R}$ symétrique.

$(x-y \in Z$ et $(y-z) \in Z) \Rightarrow (x-z \in Z)$.

car : $(x-z) = (x-y) + (y-z)$.

donc : $\mathcal{R}$ Transitive.

2.

$(x-y \in Z) \Leftrightarrow (\exists\, k \in Z : x-y = k) \Leftrightarrow (x-y = k\times 1)$.

$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\exists k \in Z : x-y = k\times 1)$ apparaît donc comme un cas particulier de la relation d'equivalence définie en Exercice 7 et en exercice 8 où il a été prouvé que $(R/\mathcal{R})$ eq. $[0,a[$. (ici : a=1).

Donc : $(R/\mathcal{R})$ eq. $[0,1[$.

Et par conséquent card $R/\mathcal{R} = c$ (Card $[0,1[= c$).

➲ Commentaire :

En recopiant les même étapes que dans l'exercice précédent (8) nous arrivons à montrer que :

$\forall x \in R\ \exists!\ (k,x_0) \in Z \times [0,1[$:

$$\begin{cases} x = k + x_0. \\ 0 \le x_0 < 1. \end{cases} \qquad (*).$$

L'application : $f : (R/\mathcal{R}) \to [0,1[$

$\xi \to x_0$.

Est bijective (Unicité de x_0).

exemple illustrant (*) :

- $3,71 = 3 + 0,71$ ($3 \in Z$ et $0,71 \in [0,1[$).
- $\forall x \in Z : x = x+0$ ($0 \in [0,1[$).
- $-10,71 = -11 + 0,29$ ($0,29 \in [0,1[$).
- $3 = [3,71]$ (partie entière de 3,71).
- $-11 = [-10,71]$(partie entière de –10,71).

Exercice 10 :

Le but de cet exercice est de définir l'addition de deux cardinaux à partir du cardinal de produits cartésiens d'ensembles.

Pour tous A et B on définit :

Card A + Card B = Card $[A\times\{1\}\cup B\times\{2\}]$.

1. Montrer que si : $A \cap B = \phi$ alors card A+ card B = card $(A\cup B)$.

2. Montrer que cette opération (+) est bien définie (si : card A = card A' et card B = card B'. Alors : card A+ card B = card A' + card B').

Solution :

Nous avons : $A\times\{1\}\cap B\times\{2\} = \phi$.

L'application $\psi : A\cup B \to A\times\{1\}\cup B\times\{2\}$

$$\begin{cases} (x,1) \text{ si : } x \in A.. \\ (x,2) \text{ si : } x \in B. \end{cases}$$

Est manifestement bijective comme recollement des deux bijections :

$\psi_1 : A \to A . \{1\}$

$x \to (x,1)$

et : $\psi_2 : B \to B . \{2\}$.

$x \to (x,2)$.

$A\cap B = \phi$.

Donc : $((A\cup B)$ eq $[A\times\{1\}\cup B\times\{2\}]) \Leftrightarrow (\mathrm{Card}(A\cup B) = \mathrm{Card}\ A + \mathrm{Card}\ B = \mathrm{Card}[A\times\{1\}\cup B\times\{2\}])$.

➲ remarque :

On retrouve Ici la définition de la somme des cardinaux définie en cours.

2.

nous avons : $(A \text{ eq } A') \Leftrightarrow (A\times\{1\} \text{ eq } A'\times\{1\})$. (1).

$(B \text{ eq } B') \Leftrightarrow (B\times\{2\} \text{ eq } B'\times\{2\})$. (2).

D'autre part nous avons : $A\times\{1\}\cap B\times\{2\} = \phi$

Et $A'\times\{1\}\cap B'\times\{2\} = \phi$.

donc : $[A\times\{1\}\cup B\times\{2\}]$ eq $[A'\times\{1\}\cup B'\times\{2\}]$. (recollement de 2 bijections).

➲ commentaire :

On peut choisir aux places de 1 et 2 n'importe quelles cardinaux finis α et β ($\alpha \neq \beta$).

Et utiliser $A\times\{\alpha\}$ et $B\times\{\beta\}$.

Les singletons $\{\alpha\}$ et $\{\beta\}$ pourraient être deux ensembles quelconques (et non forcément des cardinaux) (α et β sont toujours choisis différents l'un de l'autre).

Exercice 11 :

Nous rappelons que :

$\forall\ x\in R^+, \exists!\ x_0 \in [0,1[\ : x = [x] + x_0$. ($[x]$ est appelée partie entière de x.)

donc pour $(x,y) \in R^{+2}$, $\exists!\ (x_0,y_0) \in ([0,1[\ )^2 : x = [x] + x_0$ et $y = [y] + y_0$.

on définit sur R^+, la relation $\mathcal{R}$ par : $\forall\ (x,y) \in R^{+2}$, $(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (x_0 = y_0.)$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ et une relation d'équivalence sur R^+.

2. Définir ξ, classe de x, pour $x \in R^+$.

3. Montrer que $\forall\ x \in R+$, ξ eq N.

4. Montrer que $(R^+/\mathcal{R})$ eq $[0,1[$

Solution :

1. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence car l'égalité entre nombres réels l'est.

2. $\xi = \{y \in R^+ : x_0 = y_0\} = \{y \in R^+ \exists\, k \in N : y = k + x_0\} = x_0 + N$.

3. l'application Ψ : $\xi \to N$.

$k + x_0 \to k$ Est manifestement bijective.

Elle détermine la «Position » de l'élément de x à l'intérieur de ξ .

Donc : ξ eq N

4. L'application f : $(R^+ / \mathcal{R}) \to [0,1[$.

$\xi \to x_0$ Est bijective.

Donc : $(R^+ / \mathcal{R})$ eq $[0,1[$.

➲ commentaire :

Les résultats de 3. et 4. montrent que : Card $\xi = \aleph_0$ et card $(R^+ / \mathcal{R}) = c$

- On pourait traiter les mêmes questions sur R^- avec les modifications suivantes :

  $\forall x \in R^- : \xi = [x] + x_0 : x_0 \in]-1,0]$.

  On serait arrivé à :

  1) $\xi = x_0 + Z^- = \{y \in R^- : \exists\, k \in Z^- : y = x_0 + k\}$.

  2) $(\xi \text{ eq } Z^-) \Leftrightarrow (\text{card } \xi = \aleph_0)$

  3) $((R^- / \mathcal{R}) \text{ eq }]-1,0\,]) \Leftrightarrow (\text{card } (R^- / \mathcal{R}) = c)$

et que : R^- eq $(R^- / \mathcal{R}) \times Z^-$ et donc : $c = c\ \aleph_0$

Exercice 12 :

Cet exercice confirme les différences fondamentales entre les cardinaux finis et les cardinaux transfinis.(infinis)

Soient a et b deux cardinaux tels que : $a \leq b$.

1. Montrer qu'il existe un cardinal c tel que : $a + c = b$.

2. Montrer que si b est fini alors : a et c le sont aussi

3. Donner des exemples de cardinaux transfinis a et b tels que : $a \leq b$ et tels que :

1. c soit fini.

2. c soit égal à b (avec $c \neq a$).

3. $a = b = c$ ici c vérifie 1($a + c = b$).

4. On note $c = b-a$ chaque fois que $a+c = b$ avec $a \leq b$.

Montrer sur des exemples que cette opération (-) n'est pas définie sur les cardinaux transfinis.

(Existence de c_1 et c_2 : $a + c_L = b$ et $a + c_2 = b-$ avec $C_1 \neq c_2$). et qu'elle est définie sur les cardinaux finis (N) avec $a \leq b$.

5. Etablir les implications : $\forall$ a,b,c cardinaux finis non nuls :

1. $(a+c = b+c) \Rightarrow (a = b)$.

2. $(a \times c = b \times c) \Rightarrow (a = b)$.

6. Donner des exemples vérifiant :

1. $a+c = b+c$ et $a \neq b$.

2. $a \times c = b \times c$ et $a \neq b$. où : a,b ou c est transfini.

Solution:

1. Soient A et B deux Ensembles de cardinaux respectifs a et b.

$(a \leq b) \Leftrightarrow (\exists\ \psi : A \rightarrow B$ Injective).

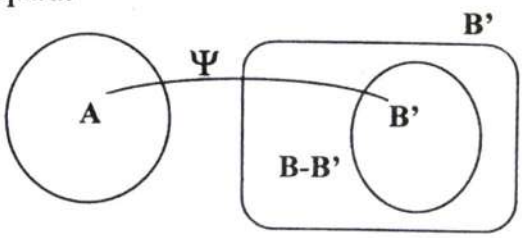
Appelons $B' = \psi(A)$. Alors B' eq A (ψ Injective).

(B' eq A) $\Leftrightarrow$ (card B'= a).

Nous avons : $B' \cup (B - B') = B$ et $B' \cap (B - B') = \phi$.

Donc : Card $(B' \cup (B- B')) =$ card B'+ card (B - B') = card B.

Posons : card (B – B') = c alors : $a+c = b$ c-q.f.d.



2.

c = Card (B-B')

(c fini) $\Leftrightarrow$ ((B-B') Ensemble fini). Montrer que c'est un cardinal fini équivaut à montrer que :

(B-B') est un ensemble fini comme partie d'un ensemble fini [(B-B') $\subset$ B fini car b cardinal fini).

a est nécessairement fini car A est Equipotent à B' partie d'un ensemble fini

Donc : A est fini.

➲ commentaire :

Le résultat de 2. montre que si un cardinal fini est la somme de deux cardinaux, alors les deux cardinaux le sont aussi.

3.

3.1. Nous avons : $1+c = c$ ($c \leq c$) ($c = 2^{\aleph_0}$). (1 cardinal fini).

3.2. $\aleph_0 + c = c$ ($a = \aleph_0$; $b = c = a$). $c = 2^{\aleph_0}$.

3.3. $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ ($a = b = c = \aleph_0$).

4. $c + 1 = c$ ($c = 2^{\aleph_0}$).

Et $c + \aleph_0 = c$.

Ici : $a = c = 2^{\aleph_0} = b$.

$c_1 = 1$ $\quad$ $c_1 \neq c_2$ ($a = b$).

$c_2 = \aleph_0$.

$a + c_1 = a + c_2 = b$.

5.

5.1. Cette implication a été établie en cours (par récurrence finie sur $c \in N^*$).

5.2. Pour établir ce résultat remarquons que :

$\forall$ a, b cardinaux tels que : $a \leq b$ avec a,b finis i.e.

$\forall (a, b) \in N^2 : a \leq b$ on a :

Le cardinal (b-a) est le cardinal tel qu'ajouté à a donne b et que dans le cas où $a = b$ alors

$(b-a) = 0$ donc : $\forall (a,b) \in N^2 : (a = b) \Leftrightarrow (b-a = 0)$ ($a-b = 0$).

$(a \leq b) \Leftrightarrow (a + (b - a) = b)$.

De plus : $\forall$ (a,b,c) $\in N^3$: $c \times (b-a) - (c\times a) = c\times b$.

Ceci étant,

$(b\times c = a\times c) \Leftrightarrow ((b\times c) - (a\times c) = 0) \Leftrightarrow (c(b-a) = 0)$.

$(c\times(b-a) = 0) \Rightarrow (b-a = 0)$ car $c \neq 0$.

$(b-a = 0) \Leftrightarrow (a = b)$. c.q.f.d.

➲ commentaire :

On a vu dans 1. et 2. de l'exercice que :

$\forall$ a,b. $\exists$ c : a+c = b et que si b est fini alors a et c le sont aussi.

Le cardinal c est noté (b-a).

(En 4. on a vu que b-a est non définie sur les cardinaux transfinis).

Dans le cas a = b les ensembles A et B utilisés dans 1. Sont équipotents et B-B' = ϕ Donc :

c = card (B-B') = b-a = 0.

D'où : $\forall$ (a,b) $\in N^2$: $(a = b) \Leftrightarrow (b-a = 0)$ (a = b = 0)

Prouvons que : $c \times (b - a) = c \times b - c \times a$.

Nous avons : $c \times [(b-a) + a] = c \times b = c \times (b-a) + (c \times a)$.

Le cardinal fini : $c\times (b - a)$ est tel qu'ajouté à $(c\times a)$ donne $(c\times b)$.

Donc : $c \times (b-a) = (c \times b) - (c \times a)$ $(a \leq b)$.

(Distributivité de $\times$ sur $-$ dans N pour $a \leq b$).

On a utilisé la propriété : $\forall(a,b) \in N^2$, $(a\times b = 0) \Rightarrow (a = 0$ ou $b = 0)$.

Cette propriété s'établit aisément par la contra posée

$(a \neq 0$ et $b \neq 0) \Rightarrow (a\times b \neq 0)$ cette implication est vraie car :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Card } A = a \neq 0 \Leftrightarrow A \neq \phi \\ \text{Card } B = b \neq 0 \Leftrightarrow B \neq \phi \end{array}\right\} \Rightarrow A\times B \neq \phi \Leftrightarrow \text{Card } (A\times B) \neq 0.$$

Et : $a\times b \neq 0$

Card $(A\times B)$ = Card A $\times$ Card B.

6. Nous avons :

$\aleph_0 + c = 1+c$ (Ici : $c = 2^{\aleph_0}$).

$$\begin{cases} a = \aleph_0 \\ b = 1 \quad \aleph_0 \neq 1 \ (a \neq b) \text{ a Transfini, b Fini.} \\ c = c \end{cases}$$

$2 + \aleph_0 = 1 + \aleph_0$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \quad a \neq b. \quad a \text{ Fini, b Fini.} \\ c = \aleph_0. \end{cases}$$

$\aleph_0 + c = c + c$ (Ici $c = 2^{\aleph_0}$).

$$\begin{cases} a = \aleph_0 \\ b = c \cdot a, \text{ b Transfinis.} \\ c = c \end{cases}$$

Ces trois exemples pourraient être utilisée pour ($\times$) i-e :

$$\begin{cases} \aleph_0 \times c = 1 \times c \\ 2 \times \aleph_0 = 1 \times \aleph_0 \\ \aleph_0 \times c = c \times c. \end{cases}$$

➲ commentaire :

Ces derniers exemples illustrent bien les différences fondamentales entre les cardinaux finis (N) et les cardinaux Transfinis.

Exercice 13 :

Donner un exemple d'ensembles A,B, A',B' tels que : A eq A' et B eq B'.
Mais tels que (A –B) $\not\text{eq}$ (A'–B'). ($\not\text{eq}$ = non Equipotent).

Solution :

Considérons les exemples :

A = { x,y,z,t }, A' = {1,2,3,4}.

B = {2}, B' = {3}.

Nous avons : A eq A' (Card A = Card A' = 4).

B eq B' (Card B = Card B' = 1).

A –B = A = {x,y,z,t} ; Card (A-B) = Card A = 4.

A'-B' = {1,2,4}. ; Card (A'-B') = Card {1,2,4} = 3

Donc : (A-B) $\not$eq (A'-B') [4 ≠ 3].

➲ **commentaire** :

cet exercice montre que pour deux ensembles données A et B card (A-B) n'est pas bien définie [(A-B) et (A'-B') Définissent deux cardinaux différents].

Même dans le cas où Card B < Card A.

∃ c : c + Card B = card A.

Mais : c n'est pas le cardinal de (A-B).

c = Card A – Card B ≠ Card (A-B).

Dans l'exercice 13 : c = 3 = (4-1).

Alors que Card (A-B) = Card A = 4.

Exercice 14 :

Montrer que si A et A' sont deux ensembles finis non vide, tels que : A eq A' et si : B ⊂ A, B'⊂ A' tels que : (B eq B') alors :

1. (A-B) eq (A'-B') et

2. Card (A – B) = Card A – Card B.

Solution :

Remarquons d'abord que B et B' sont finis comme parties d'ensembles finis.

1. (B ⊂ A) ⇔ (A = (A-B) ∪ B) (1).

(B' ⊂ A') ⇔ (A' = (A' – B') ∪ B') (2).

A fini ∃ p ∈ N*, A = {a_1 .....a_p}. A≠ ϕ et A'≠ ϕ

A' Fini et A' eq A ⇔ A' = {a'_1 , ...a'_p}.

(B ⊂ A) ⇔ (∃q : q<p : B = {a_1,.....a_q}). (ou B = ϕ).

(B' ⊂ A' et B' eq B) ⇔ (B' = {a_1',.....a'_q}) (ou B' = ϕ).

$A\text{-}B = \{a_{q+1}, \ldots\ldots\ldots\ldots a_p\}$ ou $A\text{-}B = A$ (au cas : $B = \phi$)

$A'\text{-}B' = \{a'_{q+1} \ldots\ldots\ldots\ldots a'_p\}$ ou $A\text{-}'B' = A'$ {au cas : $B' = \phi$}.

On voit que: (A-B) eq (A'-B').

$\psi : A\text{-}B \rightarrow A'\text{-}B'$

$a_i \rightarrow a'_i \ \forall i \in [q+1, p]$ bijective.

➲ remarque :

Au cas où A est fini et $B \subset A$ le cardinal de (A-B) est « bien défini » c-a-d.

(A-B) et (A'-B') définissent le même cardinal Si A' eq A et B eq B' : (B '$\subset$ A').

2. $(B \subset A) \Leftrightarrow (A = (A\text{-}B) \cup B)$ avec $(A\text{-}B) \cap B = \phi$.

Donc : (Card (A) = Card (A-B) + Card (B)) $\Leftrightarrow$ (Card (A- B) = Card A – Card B).

➲ commentaire :

Dans le résultat (A-B) eq (A'-B') il est nécessaire que B et B' Soient finis et parties respectives de A et A'.

A et A' pourraient être Infinis et toutefois équipotents.

Mais : Card (A-B) = Card A- Card B n'est vraie que si A est un ensemble Fini et $B \subset A$. car :

Card A- Card B n'est pas définie pour des cardinaux Transfinis. (Voir Exercice 12).

Prouvons dans ce commentaire que même dans le cas où A et A' sont Infinis avec B et B'.

Parties respectives finies de A et A'.

Si (A eq A' et B eq B') Alors (A-B) eq (A' – B').

(B et B' finis et B eq B') $\Leftrightarrow$ ($\exists\, p \in \mathbb{N} : B = \{a_1, \ldots\ldots\ldots a_p\}$, $B' = \{a'_1, \ldots\ldots\ldots\ldots a'_p\}$.

ou $B = B' = \phi$).

Remarquons qu'au cas : $B = B' = \phi$ alors :

A-B = A et A'-B' = A'. Donc : (A-B) eq (A'-B'), (A eq A').

(A eq A') $\Leftrightarrow$ ($\exists\, \psi : A \rightarrow A'$ bijective).

$A = \{a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots a_p\} \cup (A\text{-}B)$, $B = \{a_1 \ldots\ldots\ldots\ldots a_p\}$.

$A' = \{a'_1 \ldots\ldots\ldots\ldots a'_p\} \cup (A'\text{-}B')$, $B' = \{a_1 \ldots\ldots\ldots a'_p\}$.

Deux cas se posent :

1er cas : $\forall\ i \in [1,p] : \psi(a_i) = a'_j\ ;\ j \in [1,p]$.

alors : $\forall\ x \in A\text{-}B : \psi(x) \in (A' - B')$

Donc : $\psi : A\text{-}B \rightarrow A'\text{-}B'$

$x \rightarrow \psi(x)$ Bijective (ψ étant Bijective.)

Et : (A-B) eq (A' – B').

2ème cas : S'il existait un élément $a_i \in B : \psi(a_i) \in A' - B'$.

Alors , B et B' étant finis et Equipotents. $\exists\ a \in (A\text{-}B)$:

$\psi(a) \in B'$, ψ étant une bijection de A vers A'.

Appelons $\psi(a_i) = y' \in (A'\text{-}B')$ et $\psi(a) = a'_k \in B'$; $k \in [1,p]$.

On a : $\forall\ x \in (A\text{-}B) - \{a\} : \psi(n) \in (A' - B') - \{y\}$.

De plus , ψ étant bijective de A vers A' reste bijective de $(A - B) - \{a\}$ vers $(A'\text{-}B') - \{y'\}$.

Donc : $(A\text{-}B) - \{a\}$ eq $(A' - B') - \{y'\}$!

Comme $\{a\}$ eq $\{y'\}$. (singletons) alors (A-B) eq (A'-B').

➲ Une autre démonstration de 1. de l'exercice 14 :

Nous avons : $(B \subset A) \Leftrightarrow (A = (A\text{-}B) \cup B)$ (1).

$(B' \subset A') \Leftrightarrow (A' = (A'\text{-}B') \cup B')$ (2).

(A eq A') $\Leftrightarrow$ (Card A = Card A' = a) ; (B eq B') $\Leftrightarrow$ Card B = Card B' = b).

(B, B' finis) $\Leftrightarrow$ ($b \in \mathbb{N}$.)

Posons x = Card (A-B), y = Card (A'-B').

(1) $\Leftrightarrow$ a = x+b.....(1') ; et a = y + b .....(2').

Alors : par transitivité on a : $(x + b = y + b) \Leftrightarrow (x = y)$. (Voir exercice 12, 5.)

Donc : (Card (A-B) = Card (A'- B')) $\Leftrightarrow$ ((A-B) eq (A'- B')).

Exercice 15 :

La première question de cet exercice est indépendante des deuxième et troisième questions.

1. Donner des exemples d'ensembles non vides A, B, A', B' Tels que :

A eq A', B eq B' et $(A \cap B) \not\text{eq} (A' \cap B')$.

2. Soient A et B deux ensembles dont l'un des deux est fini. Montrer que l'on a :

Card $(A \cup B)$ = Card A + (Card B – Card ($A \cap B$)).

Où Card $(A \cup B)$ = (Card A – Card $(A \cap B)$) + Card B.

3. Dans le Cas où A et B sont des ensembles finis. Montrer alors que :

Card $(A \cup B)$ = Card A + Card B – Card $(A \cap B)$ = Card B + Card A- Card $(A \cap B)$.

Solution :

1. Donnons deux exemples :

Premier exemple :A = {1,2}, A'= {3,4},B = {1}et B' = {5}.

Nous avons : Card A = Card A'=2 ; Card B = Card B' =1.

Card $(A \cap B)$ = Card {1}= 1

Card $(A' \cap B')$ = Card ϕ = 0

ici $A \cap B = \phi$ et $A' \cap B' = \phi$.

$(A \cap B) \not\text{eq} (A' \cap B')$.

Deuxième exemple : A = {1,2}, A'={3,4}, B = {5}et B'={3}.

Nous avons : Card A= Card A' = 2, Card B = Card B' = 1.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Card } (A \cap B) = \text{Card } \phi = 0. \\ \text{Card } (A' \cap B') = \text{Card } \{3\} = 1\end{array}\right\} (A \cap B) \not\text{eq} (A' \cap B').$$

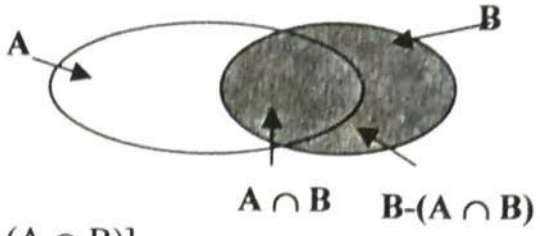
Ici : $A \cap B = \phi$ et $A' \cap B' \neq \phi$.

$(A \cap B)$ et $(A' \cap B')$ ne définissent pas le même cardinal.

2. pour des raisons purement pédagogiques nous donnons ici deux démonstrations.

2.1. Supposons B fini (A Pourrait être Infini).

$A \cap B \subset B$ est fini aussi



Nous avons : $A \cup B = A \cup [B - (A \cap B)]$

Avec : $A \cap [B-(A \cap B)] = \phi$.

Alors : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } [B-(A \cap B)]$

$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + (\text{Card } B - \text{Card}(A \cap B))$.

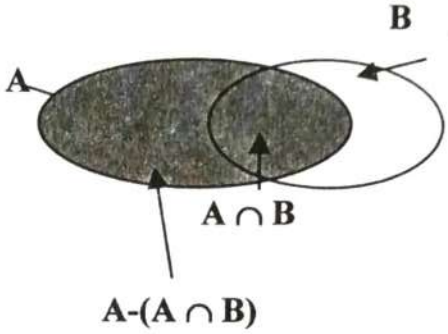
Donc :

$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + (\text{Card } B - \text{Card}(A \cap B))$.

2.2. Supposons A fini (B Pourrait être Infini).

Cette démonstration est la réplique de 2.1.

Ici aussi : $A \cap B \subset A$ Fini Donc : $A \cap B$ fini.



$A \cup B = [A-(A \cap B)] \cup B$ Avec $[A-(A \cap B)] \cap B = \phi$

$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A-(A \cap B)) + \text{Card } B$.

$\text{Card}(A \cup B) = (\text{Card } A - \text{Card}(A \cap B)) + \text{Card } B$.

3. Remarquons d'abord que Quand A et B Sont finis alors $A \cup B$ l'est aussi ($A \cap B$ étant fini également).

Nous avons d'une part : $A \cup B = A \cup (B-(A \cap B))$ avec : $A \cap (B-(A \cap B)) = \phi$.

Donc : $\text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card}(B-(A \cap B)) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } A \cap B$.

D'autre part nous avons aussi : $A \cup B = B \cup (A-(A \cap B))$ Avec $B \cap (A-(A \cap B)) = \phi$.

Donc : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } B + \text{Card}[A-(A \cap B)] = \text{Card } B + \text{Card } A - \text{Card } A \cap B$.

Donc :

$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B) = \text{Card } B + \text{Card } A - \text{Card}(A \cap B)$.

➲ remarques :

Quand A ou B pouvait être infini l'ordre dans lequel apparaissaient Card A et Card B Comptait et de ce fait, l'usage des parenthèses aussi.

Mais pour A et B finis Card A et Card B peuvent permuter, l'usage des parenthèses devient facultatif.

Toujours quand A et B sont finis on a aussi :

Card $(A \cap B)$ = Card A + Card B - Card $(A \cup B)$ = Card B + Card A – Card $(A \cup B)$.

Résultat que l'on n'a pas si A ou B était Infini !!.

(Avantage du fini sur l'infini).

Annexe

J'attire l'attention du lecteur qu'en exercice 12 du chapitre C (3ème et 4ème question notamment), il est fait usage du théorème suivant :

Si α et β sont deux nombres cardinaux différents de zéro et si l'un au moins est transfini (infini), la somme $\alpha + \beta$, le produit $\alpha x \beta$ sont égaux aux plus grands des deux.

Ce théorème est extrait de l'ouvrage Cours d'Analyse Tome 1, chapitre 1
théorie des ensembles de : « Laurent SCHAWARTZ »
Edition HERMANN 1967.

L'auteur ;

H. Lebsir.

Bibliographie

- *Michel QUEYSANNE* : **ALGEBRE**
Collection « le Mathématicien » O.P.U.-1984.
(version originale parue en 1979 sous le titre : « Algèbre, 1er cycle » aux édition Armand Colin).

- *Claude MUTAFIAN* : **le défi Algébrique**, Tome 1
Librairie Vuibert –1975.

- *Laurent SCHAWARTZ* : **Cours d'Analyse**, Tome 1
Edition HERMANN –1967.

- N. BOURBAKI : **Théorie des Ensembles**, Livre E
Edition HERMANN –1970.

SOMMAIRE

CHAPITRE E 07

opérations sur les ensembles

Exercices 1 à 11. 08

familles d'ensemble indexées.

Exercice 12 24

opération sur les familles d'ensembles partitions-recouvrements

Exercices 13 à 15 25

CHAPITRE A SECTION1 35

Généralités, injections, surjections, restriction

Exercices 1 à 6 36

Compositions-égalité-noyau d'une application

Exercices 7 à 11 44

CHAPITRE A SECTION 2 55

Involutions

Exercice 1 56

Transformations d'un ensemble E, puissances entières d'une transformations

puissances entières d'une involution

Exercices 2 à 5 57

CHAPITRE A SECTION 3 63

Transformations d'un ensemble fini

Exercice 1 64

Permutations, transpostions, cycles

Exercices 2 à 5 64

CHAPITRE A SECTION 4 79

mages, pré-images

Exerces 1 à 9 80

CHAPITRE A SECTION 5 93

Images, pré-images

Résolution de l'équation: $f^{-1}(f(A)) = A$

Exercices 1 à 9 94

CHAPITRE R SECTION1 105

Définition ensembliste d'une relation composition de relations Propriétés générales

CHAPITRE R SECTION 2 125

Relation d'équivalence associée a une application, classes d'équivalence

Exercices 1 à 4 126

Relation d'équivalence définie sur $\prod_{i \in I} E_i$

Exercice 5 132

Partie saturée par une relation d'équivalence partie saturée engendrée par une partie A (SatA).relations connexes

Exercices 6 et 7 134

CHAPITRE R SECTION 3 139

Relations d'ordre, ordre partiel, ordre total

Exercices 1,4,6,7 et 8 140

Eléments remarquables

Exercices 2,3,5 et 8 143

Ordre complet, bon ordre, ordre filtrant

Exercices 9 et 10 155

CHAPITRE C 159

Relation d'équipotence

Exercices 1, 2, 3, 5, 7 et 8 160

Cardinaux finis, cardinaux infinis

Exercices 4 et 6 165

Opérations sur les cardinaux (finis et infinis)

Puissance du dénombrable - Puissance du continu

Exercices 9 à 15 171

Annex 185

Bibliographie 187

L'ouvrage:

Cet ouvrage contient cent exercices résolus choisis parmi les chapitres délicats de l'Algèbre générale de 1ère et 2ème Année d'Université des filières Scientifiques et Techniques.

Très détaillées et de niveau varié, les solutions ont été rédigées avec le souci constant d'approfondir les notions abordées et d'élargir la portée des exercices.

L'ouvrage est vivement conseillé aux étudiants des filières Scientifiques et Techniques désirant poursuivre leurs études en Sciences Exactes ou Technologiques.

Le public:

Cet ouvrage est destiné à un large public comprenant notamment:

- *Les enseignants et étudiants du tronc commun S.E.T.I pour qui l'ouvrage est un support didactique intéressant.*
- *Les enseignants et étudiants des différents D.E.U.A (Informatique appliquée... informatique de gestion Génie civil... etc.)*
- *Les étudiants ingénieurs en informatique.*
- *Les titulaires de D.E.S ou licence de mathématique postulant à un poste d'enseignement des mathématiques dans les lycées (préparation au concours de recrutement).*

ISBN 9961-60-467-9